

С. Г. М И Х А И Н

ЛЕКЦИИ
ПО
ЛИНЕЙНЫМ
ИНТЕГРАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ

ФИЗМАТГИЗ · 1959

С. Г. МИХЛИН

Л Е К Ц И И
по
ЛИНЕЙНЫМ
ИНТЕГРАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ

*Допущено
Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия
для механико-математических
и физико-математических
факультетов университетов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

Соломон Григорьевич Михлин

Лекции по линейным интегральным уравнениям

Редактор *И. Е. Зубер.*

Технич. редактор *Р. Г. Польская*

Корректор *Е. А. Максимова.*

Сдано в набор 15/V 1959 г. Подписано к печати 29/VIII 1959 г. Бумага $84 \times 108 \frac{1}{32}$.
Печ. л. 11,89. Уч.-изд. л. 11,52. Тираж 25 000 экз. Цена 4 р. 45 к. Т-06375. Зак. 385.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71. Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза,
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Краткий исторический очерк	7
Глава I. Уравнения Фредгольма	
§ 1. Понятие об интегральных уравнениях	14
§ 2. Скалярное произведение и норма. Ортогональность	16
§ 3. Оператор Фредгольма и его степени. Итерированные ядра	29
§ 4. Метод последовательных приближений	36
§ 5. Уравнения Вольтерра	41
§ 6. Уравнение Абеля	46
§ 7. Понятие о резольvente	51
§ 8. Системы линейных алгебраических уравнений	56
§ 9. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами	59
§ 10. Общий случай уравнения Фредгольма	62
§ 11. Сопряженное уравнение Фредгольма	72
§ 12. Теоремы Фредгольма	77
§ 13. Резольвента	81
§ 14. Случай многих независимых переменных	88
§ 15. Уравнения со слабой особенностью	90
§ 16. О непрерывности решений интегрального уравнения	101
§ 17. Системы интегральных уравнений	108
§ 18. Примеры нефредгольмовских интегральных уравнений	112
Глава II. Уравнения Риса — Шаудера	
§ 19. Основные понятия об операторах	118
§ 20. Метод последовательных приближений для уравнений, содержащих ограниченный оператор	124
§ 21. Вполне непрерывные операторы	127
§ 22. Решение уравнений Риса — Шаудера	132
§ 23. Распространение теорем Фредгольма	135

Глава III. Симметричные интегральные уравнения

§ 24. Симметричные ядра	137
§ 25. Основные теоремы о симметричных уравнениях.	138
§ 26. Теорема существования характеристического числа	140
§ 27. Теорема Гильберта — Шмидта.	146
§ 28. Решение симметричных интегральных уравнений	154
§ 29. Билинейный ряд	157
§ 30. Билинейные ряды для итерированных ядер	160
§ 31. Резольвента симметричного ядра	163
§ 32. Экстремальные свойства характеристических чисел и собственных функций	165

Глава IV. Приложения интегральных уравнений

§ 33. Интегральные уравнения теории потенциала в трех- мерном пространстве	167
§ 34. Решение краевых задач теории потенциала	174
§ 35. Решение внешней задачи Дирихле	178
§ 36. Уравнения теории потенциала в многомерных про- странствах	180
§ 37. Уравнения теории потенциала на плоскости	183
§ 38. Краевая задача для обыкновенного дифференциаль- ного уравнения	190
§ 39. Собственные числа и собственные функции обык- новенного дифференциального оператора	197
§ 40. Обоснование метода Фурье	205
§ 41. Функция Грина для оператора Лапласа	209
§ 42. Собственные функции задачи о колебании мем- браны	217
Упражнения	223

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой расширенное изложение лекций, читанных автором в Ленинградском университете. Теория Фредгольма строится на основе аппроксимации (но без последующего предельного перехода) данного ядра вырожденным; такое построение, помимо его простоты, привлекательно еще тем, что оно очевидным образом связывает уравнения Фредгольма как с линейными алгебраическими системами, так и с более общими уравнениями, содержащими вполне непрерывные операторы. В пользу данного построения теории Фредгольма говорит и то, что оно принято в ряде книг, появившихся за последние годы; упомянем в этой связи вышедшие одновременно в 1947 г. „Лекции по интегральным уравнениям“ И. Г. Петровского, „Уравнения математической физики“ С. Л. Соболева и монографию автора „Приложения интегральных уравнений“, а также недавно вышедшую книгу Ф. Трикоми (F. G. Tricomi, *Integral equations*, Interscience Publishers, New York, London, 1957).

По сравнению с ранее вышедшими курсами интегральных уравнений настоящая книга имеет ряд особенностей. Прежде всего, здесь не различаются случаи конечного и бесконечного промежутков интегрирования. Ядро уравнения подчиняется условию квадратичной суммируемости по основному квадрату. В некоторых случаях налагается дополнительное требование ограниченности однократного интеграла от квадрата ядра; при этом условии удается доказать регулярную сходимость ряда Неймана и ряда Гильберта — Шмидта, а также некоторые теоремы об ограниченности или непрерывности решений интегральных уравнений. Подробно исследуются уравнения со слабой особенностью в многомерных пространствах, что важно для многих приложений.

Другим новшеством является включение в книгу небольшой главы, посвященной уравнениям, содержащим вполне непрерывный оператор; автор называет их уравнениями

Риса — Шаудера. Вполне непрерывный оператор в классе квадратично суммируемых функций определяется как оператор, который допускает разложение на сумму двух операторов — вырожденного и сколь угодно малого по норме; после этого теория Фредгольма почти автоматически переносится на новый вид уравнений. Как частные случаи получаются уравнения Фредгольма с квадратично суммируемым ядром и уравнения со слабой особенностью; тем самым дается еще один способ доказательства теорем Фредгольма для уравнения со слабой особенностью.

Чтобы не увеличивать объема книги, автор в гл. III рассматривает только симметричные уравнения Фредгольма, оставляя в стороне симметричные интегральные уравнения, содержащие вполне непрерывный оператор. Впрочем, перенесение основных результатов на этот случай не встречает особых затруднений.

В гл. IV, посвященной приложениям, несколько больше внимания, чем обычно, уделяется многомерным задачам. Задачи теории потенциала рассматриваются как на плоскости, так и в трехмерном пространстве; указывается возможность распространения основных результатов на многомерные пространства. Задача о собственных числах и собственных функциях рассматривается не только для обыкновенного дифференциального оператора, но и для оператора Лапласа на плоскости; результаты исследования используются для обоснования метода Фурье.

В конце книги приведено небольшое количество упражнений. Большая часть их — доказательство теорем, не вошедших в основной текст.

Автор воспользовался рядом замечаний, сделанных акад. В. И. Смирновым и доц. Г. П. Акиловым, и выражает им обоим свою глубокую благодарность.

Доц. Е. В. Маховер предоставила в распоряжение автора подробные записи его лекций, чем облегчила работу над книгой. Автор рад выразить Е. В. Маховер свою искреннюю признательность.

Автор будет благодарен всем лицам, которые укажут ему недостатки настоящей книги.

Ленинград
февраль 1959 г.

С. Михлин

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Интегральными уравнениями обычно называют уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла. Это определение достаточно нечеткое, поэтому вряд ли возможно строить теорию интегральных уравнений вообще — приходится исследовать отдельные, четко отграниченные *классы* интегральных уравнений. В последующем речь будет идти только о *линейных* интегральных уравнениях; более точные ограничения, позволяющие с необходимой четкостью выделить интересующий нас класс интегральных уравнений, будут приведены в свое время.

Систематическое исследование интегральных уравнений началось только в конце XIX в.; до этого работы по интегральным уравнениям носили случайный характер. Один из первых, если не первый, результат, который можно связать с интегральными уравнениями, это *формулы обращения Фурье* (1811)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(t) \cos tx \, dt, \quad (1)$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos tx \, dt. \quad (2)$$

Можно считать, что формула (2) дает решение интегрального уравнения (1), в котором $g(x)$ — неизвестная, а $f(x)$ — данная функция. Другое интегральное уравнение было получено *Абелем*, который рассматривал такую задачу: материальная точка под действием силы тяжести движется в вертикальной плоскости (ξ, η) (черт. 1) по некоторой кривой. Требуется определить эту кривую так, чтобы материальная точка, начав свое движение без начальной скорости

в точке кривой с ординатой y , достигла оси ξ за время $t=f(y)$, где функция $f(y)$ задана заранее.

Абсолютная величина скорости движущейся точки $v=\sqrt{2g(y-\eta)}$. Обозначая через α угол наклона касательной к оси ξ , имеем

$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(y-\eta)} \sin \alpha.$$

Отсюда

$$dt = -\frac{d\eta}{\sqrt{2g(y-\eta)} \sin \alpha}.$$

Интегрируя в пределах от 0 до y и обозначая $\frac{1}{\sin \alpha} = \varphi(\eta)$,

получаем интегральное уравнение Абеля

$$\int_0^y \frac{\varphi(\eta) d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = -\sqrt{2g} f(y), \quad (3)$$

решение которого будет дано в § 6.

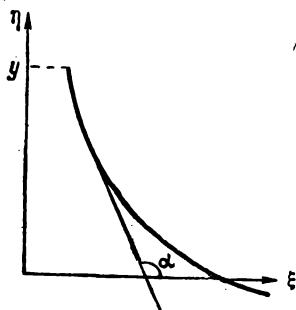
Уравнение Абеля — одно из сравнительно немногих интегральных уравнений, к которым непосредственно приводит постановка той или иной конкретной задачи

физики, механики и т. д. Значение интегральных уравнений в первую очередь заключается в том, что к ним могут быть сведены многочисленные задачи, относящиеся к *дифференциальным уравнениям*.

Важным моментом в изучении линейных интегральных уравнений явилась работа *Вольтерра* (1896), в которой он исследовал уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad (4)$$

где $\varphi(x)$ неизвестная функция, $K(x, s)$ и $f(s)$ данные функции, λ — численный параметр, и доказал, что если $K(x, s)$ и $f(s)$ непрерывны в некотором сегменте $[a, b]$, то в этом сегменте уравнение (4) имеет при любом значении λ одно и только



Черт. 1

одно непрерывное решение, которое можно построить по методу последовательных приближений. Уравнения вида (4) принято называть *уравнениями Вольтерра*.

Более трудными для исследования оказались интегральные уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (5)$$

которые отличаются от уравнений Вольтерра только тем, что переменный верхний предел интеграла x заменен постоянным пределом b . Уравнения вида (5) теперь называют *уравнениями Фредгольма*. Необходимо, впрочем, указать, что задолго до Фредгольма уравнения (5) изучали еще *Лиувиль* и *К. Нейман*, которые применяли для решения этих уравнений метод последовательных приближений; при таком методе решение интегрального уравнения получается в виде ряда, расположенного по степеням λ (*ряд Неймана*). В общем случае ряд Неймана сходится, если параметр λ достаточно мал, но для некоторых классов уравнений Фредгольма сходимости имеет место в более общих условиях. Так, упомянутый выше результат Вольтерра можно сформулировать следующим образом: ряд Неймана для уравнения (4) сходится при всех значениях λ и, следовательно, представляет собой целую функцию от λ , если только ядро и свободный член уравнения (4) непрерывны.

Заслуга Фредгольма состоит в том, что он исследовал уравнение (5), в предположении непрерывности ядра $K(x, s)$ и свободного члена $f(x)$, при *всевозможных* значениях λ . К основным результатам Фредгольма можно прийти следующим путем. Интеграл в уравнении (5) заменяется интегральной суммой; точное уравнение (5) заменяется приближенным

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{j=1}^n K(x, s_j) \varphi(s_j) \Delta s_j = f(x); \quad (6)$$

полагая в формуле (6) $x = s_1, s_2, \dots, s_n$, получаем алгебраическую линейную систему относительно неизвестных $\varphi(s_j)$:

$$\varphi(s_i) - \lambda \sum_{j=1}^n K(s_i, s_j) \varphi(s_j) \Delta s_j = f(s_i); \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Условия разрешимости системы (7) достаточно просты. Именно, определитель этой системы

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda K(s_1, s_1) \Delta s_1 & -\lambda K(s_1, s_2) \Delta s_2 & \dots & -\lambda K(s_1, s_n) \Delta s_n \\ -\lambda K(s_2, s_1) \Delta s_1 & 1 - \lambda K(s_2, s_2) \Delta s_2 & \dots & -\lambda K(s_2, s_n) \Delta s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda K(s_n, s_1) \Delta s_1 & -\lambda K(s_n, s_2) \Delta s_2 & \dots & 1 - \lambda K(s_n, s_n) \Delta s_n \end{vmatrix}$$

есть полином относительно λ ; если λ отлично от корней этого полинома, то система (7) разрешима. Решив ее и подставив полученные значения $\varphi(s_j)$ в формулу (6), получим приближенное решение уравнения (5):

$$\varphi(x) \approx f(x) + \lambda \frac{Q(x, s_1, s_2, \dots, s_n, \lambda)}{D_n(\lambda)}, \quad (8)$$

где Q и D_n — полиномы относительно λ .

Пусть теперь $\max \Delta s_j \rightarrow 0$. Оказывается, что если $K(x, s)$ и $f(x)$ непрерывны, то числитель и знаменатель второго члена в формуле (8) стремятся соответственно к пределам

$$\lambda \int_a^b D(x, s; \lambda) f(s) ds \quad \text{и} \quad D(\lambda),$$

где $D(\lambda)$ и $D(x, s; \lambda)$ — некоторые целые функции от λ ; если ввести так называемую „резольвенту Фредгольма“

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)},$$

то формула

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds \quad (9)$$

определяет решение уравнения (5) для всех значений λ , при которых $D(\lambda) \neq 0$.

Строгое обоснование упомянутых выше предельных переходов довольно затруднительно, и в своих работах Фредгольм обходится без такого обоснования; вместо этого он дает способ непосредственного построения функций $D(\lambda)$ и $D(x, s; \lambda)$ в виде рядов, расположенных по степеням λ („ряды Фредгольма“) и доказывает, что при $D(\lambda) \neq 0$

формула (9) дает решение, и притом единственное, уравнения (5).

Последующий анализ привел Фредгольма к важному выводу, что для уравнений рассмотренного им типа („уравнений Фредгольма“) справедливы основные теоремы линейной алгебры; к ним добавляется еще теорема Фредгольма о распределении *характеристических чисел* — так называются те значения λ , при которых уравнение Фредгольма может не иметь решения.

Фредгольм распространил свою теорию на системы интегральных уравнений, а также на интегральные уравнения, ядра которых не непрерывны, а имеют, по нашей терминологии, „слабую особенность“ (см. § 15).

Дальнейшие исследования линейных интегральных уравнений проводились в основном в трех направлениях. С одной стороны, выявлялись новые классы уравнений, для которых верны основные теоремы линейной алгебры (с добавлением теоремы Фредгольма о распределении характеристических чисел). Так, оказалось, что нет необходимости предполагать ядро непрерывным; достаточно, чтобы существовал двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds. \quad (10)$$

Карлеман доказал, что при этом условии остаются в силе фредгольмовские разложения в ряды функций $D(\lambda)$ и $D(x, s; \lambda)$ и что эти функции остаются целыми; другое доказательство, пригодное и для случая бесконечного промежутка (a, b) , было дано автором настоящей книги. Общие теоремы Фредгольма, а также формулы для „рядов Фредгольма“ $D(\lambda)$ и $D(x, s; \lambda)$, были затем распространены на новые классы интегральных уравнений.

Решающий шаг в направлении дальнейшего распространения теории Фредгольма был сделан *Ф. Рисом*, который показал, что эта теория в своих основных чертах остается справедливой для уравнений, в которых интегральный оператор Фредгольма

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$$

заменяется произвольным так называемым *вполне непрерывным оператором*, действующим в некотором пространстве Банаха, а данная функция $f(x)$ и искомая $\varphi(x)$ — данным и искомым элементами того же пространства. Результаты Риса были существенно дополнены *Ю. С. Шаудером*, который полностью распространил теорию Фредгольма на уравнения с вполне непрерывными операторами.

Второе направление связано с теорией ортогональных разложений и заключается в исследовании *симметричных* интегральных уравнений, для которых $K(x, s) = K(s, x)$. Фундаментальные результаты в этом направлении были получены в первом десятилетии нашего века *Гильбертом* и *Э. Шмидтом*. Коротко эти результаты можно охарактеризовать следующим образом. Теория симметричных интегральных уравнений может быть построена независимо от теории Фредгольма, хотя симметричные уравнения и являются частным случаем уравнений Фредгольма. Для симметричных интегральных уравнений установлены следующие основные факты: характеристические числа таких уравнений вещественны, а соответствующие им так называемые *собственные функции* ортогональны. Всякая функция вида

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds,$$

где $\varphi(s)$ — квадратично суммируема, разлагается в ряд по собственным функциям ядра $K(x, s)$; на этом основан, между прочим, очень простой способ решения симметричного интегрального уравнения, если только известны его характеристические числа и собственные функции. Дальнейшее развитие идей Гильберта, особенно в работах *Карлемана*, *Ф. Риса* и *И. Неймана*, привело к созданию *теории операторов в гильбертовом пространстве*, играющей в настоящее время столь важную роль в анализе и в теоретической физике.

Третье направление связано с исследованием таких уравнений, для которых неверна одна из основных теорем линейной алгебры, а именно теорема о том, что два сопряженных однородных уравнения имеют равные количества линейно независимых решений. Важным классом таких уравнений являются так называемые *сингулярные интегральные*

уравнения; входящий в такое уравнение интеграл расходится в обычном смысле и должен быть понимаем в смысле его главного значения по Коши. Основы теории таких уравнений заложены в работах *Гильберта*, *Пуанкаре*, *Карлемана* и *Нетера*; эта теория, обстоятельно разработанная рядом позднейших исследователей, была затем распространена на широкие классы уравнений в банаховских пространствах.

Отметим еще, что в последнее время получила значительное развитие теория нелинейных интегральных уравнений, основы которой были заложены трудами *А. М. Ляпунова*, *Э. Шмидта*, *П. С. Урысона* и *Гаммерштейна*.

Ко всему сказанному здесь следует добавить, что большое количество исследований было посвящено всевозможным приложениям интегральных уравнений. Объем и разнообразие этих исследований столь велики, что охарактеризовать их, даже очень кратко, здесь не представляется возможным.

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

§ 1. Понятие об интегральных уравнениях

Мы будем рассматривать интегральные уравнения вида

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x),$$

в которых неизвестной является функция $\varphi(x)$; функции $f(x)$ и $K(x, s)$ предполагаются данными. Пределы интегрирования a и b , вообще говоря, постоянны и могут быть как конечными, так и бесконечными; мы примем также, что переменная x меняется в том же промежутке (a, b) , по которому совершается интегрирование.

Функция $f(x)$ называется *свободным членом* интегрального уравнения, функция $K(x, s)$ — его *ядром*. Ядро $K(x, s)$ определено на плоскости (x, s) в квадрате $a < x, s < b$, который мы будем далее называть *основным*. Основным же мы будем называть и промежуток (a, b) .

Обычно рассматривают не одно интегральное уравнение, а семейство таких уравнений

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad (1)$$

где λ произвольная численная величина, называемая *параметром* уравнения (1).

Заметим, что переменные x и s мы считаем вещественными, тогда как параметр λ , функции $\varphi(x)$, $f(x)$ и $K(x, s)$ могут принимать как вещественные, так и комплексные значения.

Уравнения типа (1) принадлежат к классу *линейных* уравнений. Подробнее об этом будет сказано в § 3.

Уравнение (1) называется *однородным*, если $f(x) \equiv 0$, и *неоднородным*, если $f(x) \not\equiv 0$.

Во всем последующем будем предполагать, не оговаривая этого, что все рассматриваемые функции измеримы по Лебегу; все интегралы также считаются лебеговыми. Эквивалентные (т. е. почти всюду равные между собой) функции считаются равными тождественно.

Уравнение (1) называется *уравнением Фредгольма второго рода*, если его ядро и свободный член квадратично суммируемы, первое — в основном квадрате, а второй — в основном промежутке. Уравнением Фредгольма *первого рода* называют уравнение вида

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

при тех же предположениях относительно ядра и свободного члена; эти уравнения большого значения не имеют, и мы ими почти не будем заниматься.

По самому определению уравнения Фредгольма, его ядро подчинено условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds = B^2 < \infty, \quad (B)$$

из которого вытекает, в силу теоремы Фубини, что интеграл

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds$$

существует для почти всех $x \in (a, b)$ и суммируем в (a, b) ; точно так же суммируем в (a, b) определенный для почти всех $s \in (a, b)$ интеграл

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 dx.$$

В некоторых случаях мы будем накладывать на ядро следующее дополнительное условие:

Существует такая постоянная A , что для всех $x \in (a, b)$ выполняется неравенство

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds \leq A. \quad (A)$$

Если промежуток (a, b) — конечный, то выполнение условия (A) влечет за собой выполнение условия (B); в этом случае постоянные A и B связаны очевидным соотношением

$$B^2 \leq A(b - a); \quad (2)$$

в случае бесконечного промежутка условия (A) и (B) независимы.

Как уже было указано, согласно определению уравнения Фредгольма его свободный член $f(x)$ квадратично суммируем в основном промежутке (a, b) , так что интеграл

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx$$

конечен. Аналогичное требование наложим и на искомую функцию: мы будем рассматривать только квадратично суммируемые в основном промежутке решения уравнения Фредгольма, т. е. только такие его решения, для которых интеграл

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx$$

имеет конечное значение.

§ 2. Скалярное произведение и норма. Ортогональность

Материал настоящего параграфа относится к тому разделу теории функций вещественной переменной, в котором изучаются квадратично суммируемые функции и ряды Фурье. Мы приводим здесь, для облегчения ссылок, основные факты из упомянутого раздела; ряд теорем мы даем без доказательства. Подробное изложение относящихся сюда вопросов можно найти, например, в курсе И. П. Натансона «Теория функций вещественной переменной» (1957).

п° 1. В настоящем параграфе мы рассматриваем функции, квадратично суммируемые в промежутке (a, b) . Пусть $f(x)$ и $g(x)$ две такие функции. Докажем, что интеграл¹⁾

$$\int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

существует. Действительно, очевидное неравенство

$$|f(x) \overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2} [|f(x)|^2 + |g(x)|^2]$$

показывает, что функция $|f(x) \overline{g(x)}|$ не превосходит суммируемой функции $\frac{1}{2} [|f(x)|^2 + |g(x)|^2]$ и, следовательно, сама суммируема. Упомянутый интеграл называется *скалярным произведением* функций $f(x)$ и $g(x)$ и обозначается символом (f, g) , так что

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (1)$$

Легко доказываются следующие свойства скалярного произведения.

1). $(g, f) = \overline{(f, g)}$.

2). Если a_1, a_2, \dots, a_n — постоянные, то

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k f_k, g \right) = \sum_{k=1}^n a_k (f_k, g),$$

так что скалярное произведение линейно относительно первого сомножителя. Используя свойства 1 и 2, легко получим формулу

$$\left(f, \sum_{k=1}^n a_k g_k \right) = \sum_{k=1}^n \overline{a_k} (f, g_k).$$

Полагая $n=1$, находим (a — постоянная) $(af, g) = a(f, g)$; $(f, ag) = \overline{a}(f, g)$.

3). $(f, f) \geq 0$. Действительно,

$$(f, f) = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0.$$

¹⁾ Черта сверху означает комплексно сопряженную величину.

4. $(f, f) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) \equiv 0$.
Величина

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

называется *нормой* функции $f(x)$. Отметим простые свойства нормы.

а) $\|f\| \geq 0$, при этом $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) \equiv 0$.

б) $\|af\| = |a| \cdot \|f\|$.

γ) $|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

δ) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Свойства а) и б) непосредственно вытекают из свойств скалярного произведения; свойство γ) есть известное *неравенство Буняковского*. Наконец, свойство δ) называется *неравенством треугольника*.

Приведем доказательства неравенства Буняковского и неравенства треугольника. Заметим прежде всего, что если $f(x)$ и $g(x)$ — квадратично суммируемые в промежутке (a, b) функции, а λ и μ — постоянные, то функция $\lambda f(x) + \mu g(x)$ также квадратично суммируема в этом промежутке. Действительно, в силу элементарного неравенства¹⁾

$$|u + v|^2 \leq 2(|u|^2 + |v|^2)$$

имеем

$$|\lambda f(x) + \mu g(x)|^2 \leq 2[|\lambda|^2 |f(x)|^2 + |\mu|^2 |g(x)|^2];$$

функция $|\lambda f(x) + \mu g(x)|^2$ не превосходит суммируемой функции $2[|\lambda|^2 |f(x)|^2 + |\mu|^2 |g(x)|^2]$ и, следовательно, сама суммируема.

Пусть теперь $f(x)$ и $g(x)$ — квадратично суммируемые функции и λ — произвольная вещественная постоянная. Очевидно,

$$\int_a^b [|\lambda f(x)| + |g(x)|]^2 dx \geq 0.$$

¹⁾ $|u + v|^2 \leq (|u| + |v|)^2 \leq (|u| + |v|)^2 + (|u| - |v|)^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$

Раскрывая скобки и пользуясь определением нормы, получаем

$$\|f\|^2 + 2\lambda \int_a^b |f(x)| \cdot |g(x)| dx + \lambda^2 \|g\|^2 \geq 0.$$

Написанный слева квадратный трехчлен неотрицателен при любых значениях λ . Но тогда необходимо

$$\int_a^b |f(x)| \cdot |g(x)| dx \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Замечая, наконец, что

$$|(f, g)| = \left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot |g(x)| dx,$$

приходим к неравенству Буняковского.

Совсем просто доказывается неравенство треугольника. Имеем

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g),$$

или, если принять во внимание определение нормы и свойство 1 скалярного произведения,

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re} (f, g) + \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2 |(f, g)| + \|g\|^2.$$

Применяя неравенство Буняковского и извлекая корень, придем к неравенству треугольника.

Напомним определение *сходимости в среднем*. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ квадратично суммируемы в промежутке (a, b) (или на каком-либо другом измеримом множестве); если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0,$$

то говорят, что $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ в среднем (точнее, в среднем с показателем 2). Одна и та же последовательность не может сходиться в среднем к двум различным функциям: если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \psi\| = 0,$$

то

$$\|\psi - \varphi\| = \|(\varphi_n - \varphi) - (\varphi_n - \psi)\| \leq \|\varphi_n - \varphi\| + \|\varphi_n - \psi\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

отсюда $\|\psi - \varphi\| = 0$ и $\psi(x) \equiv \varphi(x)$.

Известна следующая теорема: для того, чтобы последовательность квадратично суммируемых функций $\{\varphi_n(x)\}$ сходилась в среднем, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\varphi_m - \varphi_n\| = 0.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x), \quad (*)$$

члены которого квадратично суммируемы в промежутке (a, b) , сходится в среднем и имеет суммой квадратично суммируемую функцию $\psi(x)$, если к этой функции сходится в среднем последовательность частичных сумм данного ряда. Для того чтобы ряд сходиллся в среднем, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} \psi_n \right\| = 0.$$

Если ряд сходится в среднем, то его можно интегрировать почленно, предварительно умножив на любую квадратично суммируемую функцию. Действительно, пусть ряд (*) сходится в среднем, и пусть функция $f(x)$ квадратично суммируема. Оценим разность

$$\int_a^b \psi(x) f(x) dx - \sum_{n=1}^N \int_a^b \psi_n(x) f(x) dx = \int_a^b f(x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \psi_n(x) dx.$$

По неравенству Буняковского

$$\left| \int_a^b f(x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \psi_n(x) dx \right| \leq \|f\| \cdot \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \psi_n \right\|.$$

По определению сходимости в среднем, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \psi_n \right\| < \frac{\varepsilon}{\|f\|}, \quad N \geq N(\varepsilon).$$

Отсюда

$$\left| \int_a^b \psi(x) f(x) dx - \sum_{n=1}^N \int_a^b \psi_n(x) f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \text{для } N \geq N(\varepsilon),$$

что равносильно равенству

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \psi_n(x) f(x) dx.$$

Полагая $f(x) = \overline{g(x)}$, можно последнее равенство представить в виде

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n, g \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n, g).$$

Таким образом, *сходящийся в среднем ряд можно почленно скалярно умножить на любую квадратично суммируемую функцию.*

п°2. Две функции называются *ортгональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Функция, норма которой равна единице, называется *нормированной*. Конечная или бесконечная последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (3)$$

называется *ортгональной*, если эти функции попарно ортгональны, и *ортонормированной*, если указанные функции, кроме того, нормированы. Ортонормированные функции, следовательно, удовлетворяют соотношению

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ 1 & \text{при } j = k. \end{cases} \quad (4)$$

Ортгональная система (3) называется *неполной*, если существует отличная от тождественного нуля квадратично суммируемая функция, ортгональная ко всем функциям системы; в противном случае система (3) называется *полной*.

Ортонормированные функции, взятые в любом конечном числе, линейно независимы. Действительно, если функции

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ ортонормированы и

$$\sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) \equiv 0, \quad a_j = \text{const},$$

то, умножая последнее тождество скалярно на $\varphi_k(x)$ и пользуясь соотношениями (4), найдем, что все коэффициенты a_k равны нулю.

Если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ ортонормированы и

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x), \quad a_k = \text{const},$$

то, как легко убедиться,

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2. \quad (5)$$

Если дана конечная или бесконечная последовательность линейно независимых функций

$$\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x), \dots,$$

то можно построить ортонормированную последовательность

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

так, чтобы каждая функция $\varphi_n(x)$ линейно выражалась через $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$ и, наоборот, каждая функция $\omega_n(x)$ выражалась бы линейно через $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$. Это построение выполняется с помощью следующего *процесса ортогонализации*: полагаем

$$\psi_1(x) = \omega_1(x), \quad \varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1\|};$$

если функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ уже построены, то полагаем далее

$$\psi_n(x) = \omega_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_n, \varphi_k) \varphi_k(x), \quad \varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|}.$$

Деление всегда выполнимо: если бы было $\|\psi_n\| = 0$, то $\omega_n(x)$ линейно зависела бы от $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$, а следовательно и от $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_{n-1}(x)$, что невозможно. Из построения видно, что последовательность

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ ортонормирована и что $\varphi_n(x)$ линейно выражается через $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$. В то же время $\omega_n(x)$ линейно выражается через $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$. Действительно,

$$\omega_n(x) = \|\psi_n\| \varphi_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_n, \varphi_k) \varphi_k(x).$$

п° 3. Пусть система (3) ортонормирована, и пусть $f(x)$ некоторая функция, квадратично суммируемая в промежутке (a, b) . Поставим задачу: подобрать коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ так, чтобы величина

$$\delta_n = \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j, f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right)$$

была минимальной. Обозначим

$$(f, \varphi_k) = a_k.$$

Числа a_k называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ относительно ортонормированной системы (3). Простые преобразования дают

$$\delta_n = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n |\alpha_k - a_k|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2.$$

Отсюда видно, что δ_n будет наименьшей, если $\alpha_k = a_k$. При этом

$$(\delta_n)_{\min} = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2,$$

и, так как эта величина неотрицательна, то

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

Отсюда видно, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$$

сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|f\|^2. \quad (6)$$

Неравенство (6) называется *неравенством Бесселя*. Если в (6) имеет место знак равенства, то получается так называемое *уравнение замкнутости*.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n(x) \quad (7)$$

называется *рядом Фурье* функции $f(x)$ по ортонормированной системе (3).

Ряд Фурье любой квадратично суммируемой функции сходится в среднем. Это утверждение есть частный случай более общей теоремы, известной под названием *теоремы Риса — Фишера*.

Если $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система, и числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \quad (8)$$

сходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (9)$$

сходится в среднем. При этом ряд (9) является рядом Фурье для своей суммы, для которой имеет место уравнение замкнутости.

Доказательство: По формуле (5)

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{N+p} |a_n|^2.$$

Правая часть есть остаток сходящегося числового ряда (8) и потому стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Но тогда ряд (9) сходится в среднем.

Обозначим через $\varphi(x)$ сумму ряда (9). Умножая почленно скалярно этот ряд на $\varphi_k(x)$ и учитывая, что система $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормирована, найдем, что $a_k = (\varphi, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, ряд (9) есть ряд Фурье своей суммы. Умножив ряд (9) скалярно на $\varphi(x)$, найдем также

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\varphi_n, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2;$$

это означает, что для суммы ряда (9) имеет место уравнение замкнутости.

Вернемся к ряду (7). Докажем, что, *если ортонормированная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *полна, то сумма ряда (7) равна* $f(x)$. С этой целью обозначим указанную сумму через $g(x)$ и положим $f(x) - g(x) = \omega(x)$. Имеем

$$(\omega, \varphi_n) = (f, \varphi_n) - (g, \varphi_n) = a_n - a_n = 0.$$

Будучи ортогональной ко всем функциям полной системы, $\omega(x)$ тождественно равна нулю. Отсюда $f(x) = g(x)$, или

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n(x).$$

Почленно умножая это равенство скалярно на $f(x)$, найдем

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2.$$

Таким образом, *если ортонормированная система полна, то для любой квадратично суммируемой функции имеет место уравнение замкнутости.*

п° 4. Все сказанное в настоящем параграфе, очевидным образом и без изменений переносится на функции многих переменных, квадратично суммируемых в какой-либо области или, вообще, на каком-либо измеримом множестве: надо только каждый раз интеграл по промежутку заменять интегралом по области (по измеримому множеству), в которой функции определены. В частности, если P означает точку некоторой (вообще говоря, многомерной) области D и dV — элемент объема, то скалярное произведение функций $f(P)$ и $g(P)$, квадратично суммируемых в D , определяется как интеграл

$$(f, g) = \int_D f(P) \overline{g(P)} dV.$$

п° 5. В последующем будет использовано приводимое ниже специальное построение последовательности, ортонормированной и полной в основном квадрате. Это построение без труда распространяется на случай многих переменных. Пусть $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ — полная ортонормированная в промежутке (a, b) система. Докажем, что система

$$\varphi_k(x) \varphi_m(s); \quad k, m = 1, 2, \dots \quad (10)$$

ортонормирована и полна в квадрате $a \leq x \leq b$, $a \leq s \leq b$. Рассмотрим две функции системы (7): $\varphi_k(x)\varphi_m(s)$ и $\varphi_p(x)\varphi_q(s)$. Эти функции равны между собой, если одновременно $k=p$, $m=q$, и различны в противном случае. Составим их скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\varphi_k(x)\varphi_m(s), \varphi_p(x)\varphi_q(s)) &= \\ &= \int_a^b \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_m(s) \overline{\varphi_p(x)} \overline{\varphi_q(s)} dx ds = \\ &= \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_p(x)} dx \int_a^b \varphi_m(s) \overline{\varphi_q(s)} ds. \end{aligned}$$

Так как в промежутке (a, b) функции $\varphi_n(x)$ ортонормированы, то последнее произведение равно единице при $k=p$, $m=q$ и нулю в остальных случаях. Этим доказано, что в квадрате $a \leq x \leq b$, $a \leq s \leq b$ система (7) ортонормирована.

Докажем теперь, что эта система полна. Пусть функция $\omega(x, s)$ ортогональна ко всем функциям (7).

$$\begin{aligned} (\omega(x, s), \varphi_k(x)\varphi_m(s)) &= \\ &= \int_a^b \int_a^b \omega(x, s) \overline{\varphi_k(x)} \overline{\varphi_m(s)} dx ds = 0; \quad k, m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

или

$$\int_a^b \overline{\varphi_k(x)} dx \int_a^b \omega(x, s) \overline{\varphi_m(s)} ds = 0; \quad k, m = 1, 2, \dots$$

Зафиксируем номер m и положим

$$\int_a^b \omega(x, s) \overline{\varphi_m(s)} ds = \omega_m(x),$$

тогда

$$\int_a^b \omega_m(x) \overline{\varphi_k(x)} dx = 0; \quad k = 1, 2, \dots$$

Функция $\omega_m(x)$ ортогональна в промежутке (a, b) ко всем функциям полной системы $\{\varphi_k(x)\}$ и потому тождественно

равна нулю

$$\int_a^b \omega(x, s) \varphi_m(s) ds \equiv 0; \quad m = 1, 2, \dots$$

Зафиксируем произвольно x . Последнее равенство показывает, что функция от s , равная $\omega(x, s)$, ортогональна ко всем функциям полной системы $\{\varphi_m(s)\}$. Отсюда $\omega(x, s) \equiv 0$, и полнота системы функций (10) доказана.

№ 6. Приведем некоторые примеры полных ортонормированных систем. Рассмотрим сперва случай конечного промежутка (a, b) . Из теории рядов Фурье известно, что система функций

$$\sin nt; \quad n = 1, 2, \dots$$

ортогональна (но не нормирована) и полна в промежутке $(0, \pi)$. От промежутка $(0, \pi)$ перейдем к произвольному промежутку (a, b) подстановкой $t = \frac{\pi(x-a)}{b-a}$; в новом промежутке ортогональна и полна система функций

$$\sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}; \quad n = 1, 2, \dots$$

Чтобы сделать ее нормированной, достаточно каждую функцию системы разделить на ее норму, квадрат которой равен

$$\int_a^b \sin^2 \frac{n\pi(x-a)}{b-a} dx = \frac{b-a}{2}.$$

Таким образом, функции

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

образуют в конечном промежутке (a, b) ортонормированную полную систему.

Перейдем к случаю бесконечного промежутка. Если a конечно, то можно заменой $x' = x - a$ сделать $a = 0$. Система функций

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt; \quad n = 1, 2, \dots$$

ортонормирована и полна в промежутке $(0, \pi)$, так что

$$\int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \sin kt \sin mt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq m, \\ 1 & \text{при } k = m. \end{cases} \quad (12)$$

Замена $t = \frac{\pi x}{x+1}$ переводит промежуток $0 < t < \pi$ в бесконечный промежуток $0 < x < \infty$; формула (12) преобразуется при этом к виду

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{(x+1)^2} \sin \frac{k\pi x}{x+1} \sin \frac{m\pi x}{x+1} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq m, \\ 1 & \text{при } k = m. \end{cases}$$

Отсюда видно, что функции

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{(x+1)} \sin \frac{n\pi x}{x+1}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

ортонормированы в промежутке $(0, \infty)$. Докажем, что в этом промежутке система (13) полна. Допустим, что квадратично суммируемая в упомянутом промежутке функция $f(x)$ ортогональна ко всем функциям (13)

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin \frac{n\pi x}{x+1} \frac{dx}{x+1} = 0; \quad n = 1, 2, \dots,$$

или, если сделать подстановку $t = \frac{\pi x}{x+1}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi-t} f\left(\frac{t}{\pi-t}\right) \sin nt \, dt = 0. \quad (14)$$

Функция $\frac{1}{\pi-t} f\left(\frac{t}{\pi-t}\right)$ квадратично суммируема в промежутке $(0, \pi)$, так как

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(\pi-t)^2} \left| f\left(\frac{t}{\pi-t}\right) \right|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty;$$

из равенства (14) видно, что эта функция ортогональна к полной системе $\{\sin nx\}$ и потому тождественно равна

нулю. Но тогда и $f(x) \equiv 0$ и, следовательно, система (13) полна.

Если $a = -\infty$, $b = +\infty$, то можно исходить, например, из системы

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2int}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ортонормированной и полной в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; замена $x = \operatorname{tg} t$ приведет нас, как и выше, к системе

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(1+x^2)}} e^{2in \operatorname{arctg} x}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ортонормированной и полной в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Другим примером системы, ортонормированной и полной в промежутке $(0, \infty)$, является система функций

$$e^{-x/2} L_n(x); \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $L_n(x)$ — так называемые *полиномы Лагерра*

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

В промежутке $(-\infty, +\infty)$ образуют ортонормированную полную систему функции

$$\frac{e^{-x^2/2} H_n(x)}{2^{n/2} \sqrt{n!} \sqrt{\pi}},$$

где $H_n(x)$ — *полиномы Эрмита*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

§ 3. Оператор Фредгольма и его степени. Итерированные ядра

Пусть ядро $K(x, s)$ квадратично суммируемо в основном квадрате; это допущение, если только не оговорено противное, предполагается выполненным во всем последующем. Введем обозначение

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds. \quad (1)$$

Пусть функция $\varphi(x)$ квадратично суммируема в промежутке (a, b) . Докажем, что в этом случае интеграл (1) существует при почти всех $x \in (a, b)$ и представляет собой функцию, квадратично суммируемую в том же промежутке. Имеем

$$|K(x, s) \varphi(s)| \leq \frac{1}{2} |K(x, s)|^2 + \frac{1}{2} |\varphi(s)|^2.$$

Первое слагаемое справа суммируемо по s при почти всех $x \in (a, b)$, а второе слагаемое просто суммируемо по s в промежутке (a, b) . Отсюда следует, что в указанном промежутке подынтегральная функция в интеграле (1) суммируема при почти всех $x \in (a, b)$ и, следовательно, интеграл (1) есть функция от x , определенная почти всюду в (a, b) . Далее, по неравенству Буняковского

$$|K\varphi|^2 \leq \int_a^b |K(x, s)|^2 ds \int_a^b |\varphi(s)|^2 ds = \|\varphi\|^2 \int_a^b |K(x, s)|^2 ds,$$

и, так как ядро квадратично суммируемо в основном квадрате, то функция $K\varphi$ квадратично суммируема в промежутке (a, b) ; интегрируя последнее неравенство и извлекая корень, получаем

$$\|K\varphi\| \leq B \|\varphi\|; \quad (2)$$

Величина B определена формулой (B) § 1.

Таким образом, если квадратично суммируемая функция $\varphi(x)$ задана, то интеграл (1) определяет новую (также квадратично суммируемую) функцию. Можно сказать, что интеграл (1) задает некоторый закон, по которому каждой квадратично суммируемой функции $\varphi(x)$ приводится в соответствие, и притом единственным образом, новая функция $K\varphi$. Вообще, если дан закон, по которому любой функции из некоторого данного множества единственным образом приводится в соответствие некоторая новая функция, то говорят, что на данном множестве функций определен оператор¹⁾. Из сказанного следует, что если ядро $K(x, s)$ квадратично суммируемо в основном квадрате, то интеграл (1) определяет некоторый оператор на множестве

¹⁾ По поводу определения оператора см. также § 19.

функций, квадратично суммируемых в промежутке (a, b) . Этот оператор называется *оператором Фредгольма*.

Оператор Фредгольма обладает следующим очевидным свойством: если α_1 и α_2 — постоянные, а $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — квадратично суммируемые функции, то

$$K(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 K\varphi_1 + \alpha_2 K\varphi_2.$$

Операторы, обладающие этим свойством, называются *линейными*; таким образом, *всякий оператор Фредгольма — линейный*. В соответствии с этим интегральные уравнения Фредгольма также называются *линейными*.

Пусть дан еще один оператор Фредгольма

$$L\varphi = \int_a^b L(x, s) \varphi(s) ds.$$

По определению, двойной интеграл от $|L(x, s)|^2$ конечен; положим

$$\int_a^b \int_a^b |L(x, s)|^2 dx ds = B'^2.$$

Составим выражение $LK\varphi = L(K\varphi)$. Такое выражение уместно назвать *произведением* операторов Фредгольма K и L . Нетрудно видеть, что умножение операторов ассоциативно. Действительно, если K, K', K'' — три оператора Фредгольма, то оба выражения $K''(K'K\varphi)$ и $K''K'(K\varphi)$ означают, что над функцией $\varphi(x)$ произведена операция K , над полученной функцией $K\varphi$ произведена операция K' и, наконец, над функцией $K'K\varphi$ произведена операция K'' .

Докажем, что *произведение операторов Фредгольма также есть оператор Фредгольма*. Составим выражение $LK\varphi$. Для этого в интеграле (1) надо x заменить на s ; в связи с этим придется в этом интеграле изменить обозначение переменной интегрирования — обозначим ее через t . Теперь имеем

$$LK\varphi = \int_a^b L(x, s) ds \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt. \quad (*)$$

Повторный интеграл

$$\int_a^b |L(x, s)| ds \int_a^b |K(s, t) \varphi(t)| dt \quad (**)$$

существует. Действительно, по доказанному выше, внутренний интеграл есть квадратично суммируемая функция от s , а тогда ее произведение на квадратично суммируемую функцию $|L(x, s)|$ суммируемо при почти всех x . Из существования интеграла $(**)$ вытекает, как известно, суммируемость функции $|L(x, s)K(s, t)\varphi(t)|$ в квадрате $a < s, t < b$, и, в силу теоремы Фубини, в интеграле $(*)$ можно изменить порядок интегрирования:

$$LK\varphi = \int_a^b \varphi(t) dt \int_a^b L(x, s)K(s, t) ds.$$

Заменяв обозначение s на t и наоборот, имеем

$$LK\varphi = \int_a^b \varphi(s) ds \int_a^b L(x, t)K(t, s) dt$$

и, если обозначить

$$\int_a^b L(x, t)K(t, s) dt = M(x, s), \quad (3)$$

то

$$LK\varphi = \int_a^b M(x, s)\varphi(s) ds. \quad (4)$$

Далее, по неравенству Буняковского

$$|M(x, s)|^2 \leq \int_a^b |L(x, t)|^2 dt \int_a^b |K(t, s)|^2 dt. \quad (5)$$

Интегрируя это по основному квадрату, получим

$$\int_a^b \int_a^b |M(x, s)|^2 dx ds \leq B^2 B'^2, \quad (6)$$

Таким образом, ядро $M(x, s)$ оператора LK квадратично суммируемо в основном квадрате; по определению, данному в § 1, оператор LK есть оператор Фредгольма.

Формулы (3) и (4) показывают, что умножение операторов Фредгольма в общем случае не перестановочно: если через $N(x, s)$ обозначить ядро произведения операторов KL , то, по формуле (3),

$$N(x, s) = \int_a^b K(x, t) L(t, s) dt, \quad (7)$$

и очевидно, что, вообще говоря, $M(x, s) \neq N(x, s)$. Пусть, например, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, s) = 1$, $L(x, s) = x - s$.

Тогда

$$M(x, s) = \int_0^1 (x - t) dt = x - \frac{1}{2},$$

$$N(x, s) = \int_0^1 (t - s) dt = \frac{1}{2} - s.$$

Если ядра операторов K и L удовлетворяют еще и условию (A) (см. § 1), то ядра произведений KL и LK удовлетворяют тому же условию. Действительно, пусть

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds \leq A, \quad \int_a^b |L(x, s)|^2 ds \leq A'.$$

В этом случае неравенство (5) дает

$$|M(x, s)|^2 \leq A' \int_a^b |K(t, s)|^2 dt;$$

интегрируя это по s , получим

$$\int_a^b |M(x, s)|^2 ds \leq A' B^2. \quad (8)$$

Исходя из формулы (7), найдем аналогично

$$\int_a^b |N(x, s)|^2 ds \leq AB'^2; \quad (9)$$

ядра операторов LK и KL удовлетворяют условию (A) с постоянными $A'B^2$ и AB'^2 соответственно.

Очевидно, произведение нескольких операторов Фредгольма также есть оператор Фредгольма. Произведение n одинаковых операторов Фредгольма K называется n -ой степенью оператора K и обозначается через K^n . Очевидно,

$$K^2\varphi = K(K\varphi), \dots, \quad K^n\varphi = K(K^{n-1}\varphi).$$

Так как умножение операторов ассоциативно, то верна общая формула

$$K^n\varphi = K^m(K^{n-m}\varphi), \quad 0 < m < n. \quad (10)$$

Из сказанного выше следует, что степень оператора Фредгольма есть оператор Фредгольма. Обозначим через $K_n(x, s)$ ядро оператора K^n , тогда

$$K^n\varphi = \int_a^b K_n(x, s) \varphi(s) ds. \quad (11)$$

Очевидно, $K_1(x, s) = K(x, s)$.

Ядро $K_n(x, s)$ называется n -ым *итерированным ядром* по отношению к $K(x, s)$.

Из формулы (3) мы непосредственно получаем рекуррентную формулу для итерированных ядер

$$K_n(x, s) = \int_a^b K(x', t) K_{n-1}(t, s) dt. \quad (12)$$

Так как $K_1(x, s) = K(x, s)$, то, в частности,

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) dt,$$

$$K_3(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_2(t, s) dt$$

и т. д.

Если применить формулу (3) к операторам K^m и K^{n-m} и воспользоваться формулой (10), то получится более общее

соотношение

$$K_n(x, s) = \int_a^b K_m(x, t) K_{n-m}(t, s) dt. \quad (13)$$

Положив здесь $m=1$, опять получим формулу (12); при $m=n-1$ получим еще одну полезную формулу

$$K_n(x, s) = \int_a^b K_{n-1}(x, t) K(t, s) dt. \quad (14)$$

Заменяя в этой формуле ядро K_{n-1} по той же формуле (14), можно понизить номер ядра под интегралом. Прделав эту операцию достаточное число раз, мы придем к формуле, непосредственно выражающей итерированные ядра через данное

$$K_n(x, s) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \dots K(t_{n-1}, s) \times \\ \times dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}. \quad (15)$$

Обозначим через B_n^2 интеграл

$$B_n^2 = \int_a^b \int_a^b |K_n(x, s)|^2 dx ds.$$

Полагая в формуле (6) $L = K^{n-1}$, получим рекуррентное соотношение $B_n^2 \leq B^2 B_{n-1}^2$, из которого далее следует $B_n^2 \leq B^4 B_{n-2}^2 \leq \dots \leq B^{2n}$, или

$$B_n \leq B^n. \quad (16)$$

Применив теперь неравенство (2) к оператору K^n , получим важное для последующего неравенство

$$\|K^n \varphi\| \leq B^n \|\varphi\|. \quad (17)$$

Если ядро $K(x, s)$ удовлетворяет еще и условию (A), то тому же условию удовлетворяют и итерированные ядра. Имея это в виду, найдем оценку для величины

$$A_n = \sup \int_a^b |K_n(x, s)|^2 ds,$$

В формуле (3) положим $L(x, t) = K_{n-1}(x, t)$. Тогда, как это следует из формулы (14), $M(x, s) = K_n(x, s)$, и неравенство (8) дает

$$\int_a^b |K_n(x, s)|^2 ds \leq A_{n-1} B^2, \quad (18)$$

так как, очевидно,

$$\int_a^b |K_{n-1}(x, s)|^2 ds \leq A_{n-1}.$$

Заменив в (18) левую часть ее точной верхней границей, получим $A_n \leq A_{n-1} B^2$. Отсюда легко находим $A_n \leq AB^{2n-2}$, и окончательно

$$\int_a^b |K_n(x, s)|^2 ds \leq AB^{2n-2}. \quad (19)$$

§ 4. Метод последовательных приближений

Уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (1)$$

попытаемся решить по методу последовательных приближений. Перепишем наше уравнение в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda K\varphi. \quad (2)$$

За начальное приближение примем $\varphi_0(x) = f(x)$; далее, если некоторое приближение $\varphi_{n-1}(x)$ уже построено, то за следующее приближение примем результат подстановки функции $\varphi_{n-1}(x)$ в правую часть уравнения (2):

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda K\varphi_{n-1}. \quad (3)$$

Имеем, следовательно,

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda K\varphi_0 = f(x) + \lambda Kf,$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda K\varphi_1 = f(x) + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f$$

и т. д. По индукции легко получаем

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f + \dots + \lambda^n K^n f,$$

что можно также представить в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^n \lambda^m K^m f. \quad (4)$$

Выясним, при каких условиях последовательные приближения имеют предел при $n \rightarrow \infty$. Функцию $\varphi_n(x)$ можно рассматривать как частичную сумму ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K^m f; \quad (5)$$

задача, следовательно, состоит в установлении условий сходимости этого ряда, который обычно называют *рядом Неймана*.

Теорема 1. Если ядро интегрального уравнения квадратично суммируемо и $|\lambda| < \frac{1}{B}$, где

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds,$$

то ряд Неймана для этого уравнения сходится в среднем к квадратично суммируемому решению уравнения (1). Такое решение — единственное.

Оценим величину

$$\left\| \sum_{m=N+1}^{N+p} \lambda^m K^m f \right\|.$$

Применяя неравенство треугольника и неравенство (17) § 3, получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=N+1}^{N+p} \lambda^m K^m f \right\| &\leq \sum_{m=N+1}^{N+p} |\lambda|^m \|K^m f\| \leq \|f\| \sum_{m=N+1}^{N+p} (|\lambda| B)^m \leq \\ &\leq \|f\| \sum_{m=N+1}^{\infty} (|\lambda| B)^m = \|f\| \frac{(|\lambda| B)^{N+1}}{1 - |\lambda| B}. \end{aligned}$$

При N достаточно большом последняя величина может быть сделана сколь угодно малой; отсюда следует, что ряд Неймана сходится в среднем к некоторой квадратично сум-

мируемой функции, которую мы обозначим через $\varphi(x)$, так что $\|\varphi_n - \varphi\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Докажем, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1). В формуле (3) положим $n \rightarrow \infty$. Левая часть имеет пределом $\varphi(x)$, и нам достаточно доказать, что $K\varphi_{n-1} \rightarrow K\varphi$ в среднем. Но это очевидно: по неравенству (2) § 3

$$\|K\varphi_{n-1} - K\varphi\| = \|K(\varphi_{n-1} - \varphi)\| \leq B \|\varphi_{n-1} - \varphi\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Остается доказать, что построенное нами решение — единственное. Пусть уравнение (1) имеет два квадратично суммируемых решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Тогда справедливы два тождества $\varphi(x) - \lambda K\varphi = f(x)$, $\psi(x) - \lambda K\psi = f(x)$.

Вычтем их почленно. Обозначив $\varphi(x) - \psi(x) = \omega(x)$, найдем в силу линейности оператора K

$$\omega(x) - \lambda K\omega = 0. \quad (6)$$

Таким образом, *разность двух решений удовлетворяет соответствующему однородному интегральному уравнению*; это замечание пригодится нам и в дальнейшем.

Докажем, что $\omega(x) \equiv 0$. Имеем $\omega(x) = \lambda K\omega$. Отсюда, $\|\omega\| = |\lambda| \cdot \|K\omega\|$ и, по неравенству (2) § 3, $\|\omega\| \leq |\lambda| B \|\omega\|$, или $(1 - |\lambda| B) \|\omega\| \leq 0$. По условию теоремы $|\lambda| B < 1$, выражение в скобках положительно и поэтому необходимо $\|\omega\| = 0$. Отсюда $\omega(x) \equiv 0$ и, следовательно, $\psi(x) \equiv \varphi(x)$.

Теорема 2. *Если ядро уравнения (1) не только квадратично суммируемо, но и удовлетворяет условию (A), и $|\lambda| B < 1$, то ряд Неймана сходится регулярно¹⁾ на сегменте $[a, b]$.*

Для доказательства оценим общий член ряда (5). По неравенству Буняковского

$$\begin{aligned} |\lambda^m K^m f| &= |\lambda^m| \left| \int_a^b K_m(x, s) f(s) ds \right| \leq \\ &\leq |\lambda|^m \left\{ \int_a^b |K_m(x, s)|^2 ds \right\}^{1/2} \|f\| \end{aligned}$$

¹⁾ Ряд называется регулярно сходящимся, если ряд из его абсолютных величин сходится равномерно. Такой ряд, очевидно, сходится абсолютно и равномерно.

и, в силу неравенства (19) § 3, при $m \geq 1$

$$|\lambda^m K^m f| \leq \frac{\sqrt{A}}{B} \|f\| (|\lambda| B)^m.$$

Правая часть этого неравенства есть общий член геометрической прогрессии, знаменатель которой, равный $|\lambda| B$, меньше единицы. По известной теореме Вейерштрасса, ряд (5) сходится регулярно.

З а м е ч а н и е. Если ядро ограничено, $|K(x, s)| \leq M$, то можно указать более простую, хотя и более грубую, оценку для радиуса круга сходимости последовательных приближений. Так как

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds \leq (b-a)^2 M^2,$$

то последовательные приближения сходятся в круге $|\lambda| < \frac{1}{(b-a)M}$.

Возникает такой вопрос: нельзя ли утверждать, что последовательные приближения сходятся при всех значениях λ или, что они, по крайней мере, сходятся в круге (с центром в точке $\lambda = 0$) радиуса, большего, чем $\frac{1}{B}$? Оказывается, что это не так: для задачу взятого интегрального уравнения Фредгольма последовательные приближения могут расходиться при $|\lambda| \geq \frac{1}{B}$, хотя и существуют классы интегральных уравнений (например, уравнения Вольтерра), для которых последовательные приближения сходятся при любом значении параметра.

Рассмотрим следующий пример. Пусть дано интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(s) ds = 1. \quad (7)$$

Здесь $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = 1$, $K(x, s) = 1$, $B = 1$; по теореме 1 настоящего параграфа, последовательные приближения для уравнения (7) сходятся в круге $|\lambda| < 1$. Однако, это уравнение можно легко решить, не прибегая к методу последовательных приближений. Чтобы решить уравнение (7), заметим, что интеграл

$$\int_0^1 \varphi(s) ds$$

является некоторой, хотя и неизвестной, постоянной. Обозначим ее через C , тогда из уравнения (7) следует, что

$$\varphi(x) = 1 + \lambda C, \quad (8)$$

и дело сводится к отысканию неизвестной постоянной C . Подставляя выражение (8) в (7), получаем после очевидных упрощений

$$(1 - \lambda) C = 1. \quad (9)$$

При $\lambda = 1$ это уравнение неразрешимо и, значит, при $\lambda = 1$ интегральное уравнение (7) решения не имеет. Отсюда уже следует, что в круге радиуса, большего единицы, последовательные приближения для уравнения (7) не могут сходиться.

Интересно, что в то же время уравнение (7) разрешимо, если только $\lambda \neq 1$, даже тогда, когда последовательные приближения расходятся. В самом деле, если $\lambda \neq 1$, то из уравнения (9) находим $C = \frac{1}{1-\lambda}$ и, следовательно, $\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda}$; подставив это в уравнение (7), найдем, что уравнение удовлетворяется.

Рассмотрим еще уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(s) ds = f(x), \quad (10)$$

в котором, в отличие от уравнения (7), свободный член есть произвольная квадратично суммируемая в промежутке $(0, 1)$ функция. Полагаем по-прежнему

$$C = \int_0^1 \varphi(s) ds,$$

что дает нам $\varphi(x) = f(x) + \lambda C$; проинтегрировав это в пределах от 0 до 1, получим уравнение для определения C :

$$(1 - \lambda) C = \int_0^1 f(x) dx. \quad (11)$$

Если $\lambda \neq 1$, то

$$C = \frac{1}{1-\lambda} \int_0^1 f(x) dx$$

и

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^1 f(x) dx;$$

подстановкой убеждаемся, что эта функция удовлетворяет уравнению (10), которое, следовательно, разрешимо и имеет единственное решение при $\lambda \neq 1$.

Пусть теперь $\lambda = 1$. Уравнение (11) принимает вид

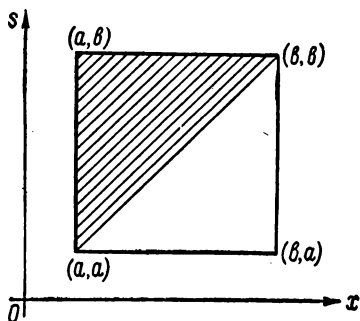
$$\int_0^1 f(x) dx = 0. \quad (12)$$

Если функция $f(x)$ такова, что равенство (12) не имеет места, то уравнение (10) не имеет решения; так было, как мы видели, при $f(x) \equiv 1$. Если же равенство (12) выполнено, то постоянная C остается неопределенной; подстановка показывает, что при $\lambda = 1$ уравнение (10) имеет бесчисленное множество решений вида $\varphi(x) = f(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

§ 5. Уравнения Вольтерра

Уравнение Фредгольма будем называть *уравнением Вольтерра*, если нижний предел интегрирования a конечен, а ядро обращается в нуль при $s > x$ (т. е. в заштрихованной части основного квадрата — черт. 2). Поэтому в уравнении Вольтерра

$$\begin{aligned} K\varphi &= \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = \\ &= \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds + \\ &+ \int_x^b K(x, s) \varphi(s) ds = \\ &= \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds. \end{aligned}$$



Черт. 2

Формально, следовательно, уравнение Вольтерра отличается от уравнения Фредгольма общего вида переменным верхним пределом интегрирования; уравнение Вольтерра можно записать в виде

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (1)$$

Для упрощения рассуждений будем рассматривать уравнение Вольтерра при дополнительном предположении, что его ядро ограничено, когда x меняется в некотором конечном промежутке (a, b) , так что

$$|K(x, s)| \leq M = \text{const}, \quad a < x < b.$$

При этом предположении справедлива

Теорема: Если свободный член уравнения Вольтерра суммируем в промежутке (a, b) , то это уравнение имеет суммируемое в том же промежутке решение, которое при любом значении параметра λ можно построить по методу последовательных приближений. Суммируемое решение уравнения Вольтерра единственно.

Как и в случае уравнения Фредгольма общего вида, предел последовательных приближений совпадает с суммой ряда Неймана

$$f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K^n f; \quad (2)$$

наша задача сводится поэтому к доказательству того, что ряд (2) при любом фиксированном значении λ сходится равномерно по отношению к x .

Докажем прежде всего, что если $K_m(x, s)$ есть m -ое итерированное ядро, то

$$\left. \begin{aligned} K_m(x, s) &= 0 && \text{при } s > x, \\ K_m(x, s) &= \int_a^x K_{m-1}(x, t) K(t, s) dt && \text{при } s < x. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Пусть $m = 2$. Имеем

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) dt. \quad (4)$$

Если $s > x$, то при $t < s$ второй множитель под знаком интеграла в (4) равен нулю, если же $t > s$, то тем более $t > x$ и тогда обращается в нуль первый множитель под знаком интеграла. В обоих случаях подинтегральная функция равна нулю и $K_2(x, s) = 0$.

Пусть теперь $s < x$. Промежуток интегрирования разобьем на три: (a, s) , (s, x) , (x, b) . Тогда

$$K_2(x, s) = \int_a^s K(x, t) K(t, s) dt + \int_s^x K(x, t) K(t, s) dt + \\ + \int_x^b K(x, t) K(t, s) dt.$$

В первом интеграле $t < s$, значит, во втором множителе под интегралом второй аргумент больше первого и этот множитель равен нулю. В третьем интеграле $t > x$ и первый множитель под знаком интеграла равен нулю. В результате

$$K_2(x, s) = \int_s^x K(x, t) K(t, s) dt,$$

и формула (3) доказана для $m = 2$. По индукции ее легко получить для любого m .

Докажем теперь, что при $s < x$ имеет место следующая оценка:

$$|K_m(x, s)| \leq \frac{M^m (x-s)^{m-1}}{(m-1)!}. \quad (5)$$

Оценка (5) очевидно верна при $m = 1$, так как в этом случае она выражает просто тот факт, что ядро $K(x, s)$ ограничено; величина M представляет собой верхнюю границу ядра. Пусть теперь оценка (5) установлена для некоторого индекса $m - 1$

$$|K_{m-1}(x, s)| \leq \frac{M^{m-1} (x-s)^{m-2}}{(m-2)!}.$$

По формуле (3) получим

$$|K_m(x, s)| \leq \int_s^x \frac{M^m (x-t)^{m-2}}{(m-2)!} dt = \frac{M^m (x-s)^{m-1}}{(m-1)!},$$

так что оценка (5) имеет место и для индекса m . Заменяя в формуле (5) разность $x - s$ ее наибольшим значением

$b - a$, найдем

$$|K_m(x, s)| \leq \frac{M^m (b-a)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Оценим теперь общий член ряда (2)

$$\begin{aligned} |\lambda^m K^m f| &= |\lambda^m| \cdot \left| \int_a^x K_m(x, s) f(s) ds \right| \leq \\ &\leq \frac{|\lambda|^m M^m (b-a)^{m-1}}{(m-1)!} \int_a^b |f(s)| ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Как мы видим, общий член ряда (2) не превосходит общего члена показательного ряда, следовательно, ряд (2) сходится регулярно по x при любом λ .

Как и в случае уравнения Фредгольма общего вида, последовательные приближения связаны рекуррентным соотношением

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda K \varphi_{n-1},$$

которое в данном случае можно представить в виде

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi_{n-1}(s) ds. \quad (7)$$

Сумму ряда (2) обозначим через $\varphi(x)$. Как только что было показано, $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно. Ядро $K(x, s)$ ограничено, поэтому

$$K(x, s) \varphi_{n-1}(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K(x, s) \varphi(s)$$

равномерно относительно s . Отсюда следует, что в соотношении (7) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Выполнив предельный переход, найдем, что

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds,$$

т. е. что сумма ряда (2) есть решение уравнения Вольтерра. Это решение суммируемо, так как оно получено сложением суммируемой функции $f(x)$ и ограниченной функции

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m K^m f;$$

ограниченность этой функции сразу следует из оценки (6):

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m K^m f \right| \leq \int_a^b |f(s)| ds \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^m M^m (b-a)^{m-1}}{(m-1)!} =$$

$$= |\lambda| M e^{|\lambda| M (b-a)} \int_a^b |f(s)| ds.$$

Перейдем к доказательству единственности решения. Пусть уравнение Вольтерра имеет два суммируемых решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Их разность $\omega(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\omega(x) = \lambda K \omega. \quad (8)$$

В правую часть этого уравнения подставим вместо ω равную ей величину $\lambda K \omega$. Это приведет нас к уравнению $\omega(x) = \lambda^2 K^2 \omega$. Заменяя опять справа ω на $\lambda K \omega$, получим уравнение $\omega(x) = \lambda^3 K^3 \omega$ и т. д. Прделав эту подстановку m раз, найдем, что $\omega(x)$ удовлетворяет уравнению $\omega(x) = \lambda^m K^m \omega$, или, в более подробной записи,

$$\omega(x) = \lambda^m \int_a^b K_m(x, s) \omega(s) ds.$$

$\omega(x)$ сама суммируема, как разность суммируемых функций; в силу оценки (6)

$$|\omega(x)| \leq \frac{|\lambda|^m M^m (b-a)^{m-1}}{(m-1)!} \int_a^b |\omega(s)| ds, \quad (9)$$

каково бы ни было m . Полагая в (9) $m \rightarrow \infty$, получим $|\omega(x)| \leq 0$, откуда следует, что $\omega(x) \equiv 0$.

Возникает интересный вопрос: остается ли в силе теорема о единственности решения, если отказаться от требования его суммируемости? Оказывается, что тогда теорема единственности перестает быть верной. П. С. Урысоном были построены примеры уравнений Вольтерра, имеющих, кроме одного суммируемого решения, еще бесконечное множество решений несуммируемых. Приведем

один из примеров П. С. Урысона. Положим $a = 0$, $b = 1$, $f(x) \equiv 0$ и зададим ядро формулой

$$K(x, s) = \begin{cases} se^{\frac{1}{x^2}-1}, & s \leq xe^{1-\frac{1}{x^2}}, \\ x, & xe^{1-\frac{1}{x^2}} \leq s \leq x, \\ 0, & s > x. \end{cases}$$

В основном квадрате $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ ядро ограничено, так как, очевидно,

$$0 \leq K(x, s) \leq x \leq 1.$$

Уравнение

$$\varphi(x) - \int_0^x K(x, s) \varphi(s) ds = 0$$

имеет суммируемое решение $\varphi(x) \equiv 0$; в силу теоремы настоящего параграфа других суммируемых решений это уравнение не имеет. В то же время оно имеет бесконечное множество несуммируемых решений

$$\varphi(x) = \frac{c}{x},$$

где c — произвольная постоянная. В этом легко убедиться простой подстановкой.

§ 6. Уравнение Абеля

Одно из первых интегральных уравнений было изучено Абелем; его уравнение имело вид

$$\int_a^x \frac{\varphi(s)}{\sqrt{x-s}} ds = f(x).$$

Будем также называть *уравнением Абеля* несколько более общее уравнение

$$\int_a^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^\alpha} ds = f(x), \quad (1)$$

где α — постоянная, $0 < \alpha < 1$. Функцию $f(x)$ будем считать непрерывно дифференцируемой на некотором сегменте $[a, b]$. Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение Вольтерра первого рода с неограниченным ядром весьма специального вида.

Уравнение Абеля решается следующим приемом. Допустим, что существует решение этого уравнения. Заменим в уравнении x на t , обе части полученного равенства умножим на $\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$ и проинтегрируем по t в пределах от a до x :

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} ds = \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

Слева изменим порядок интегрирования, пользуясь известной формулой Дирихле. Это приведет нас к уравнению

$$\int_a^x \varphi(s) ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha} (t-s)^\alpha} = F(x); \quad (2)$$

где

$$F(x) = \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt. \quad (3)$$

Во внутреннем интеграле (2) сделаем подстановку $t = s + y(x-s)$, тогда

$$\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha} (t-s)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha (1-y)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}.$$

Теперь из уравнения (2) следует

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} F'(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt. \quad (4)$$

Таким образом, решение уравнения (1), если оно существует, necessarily представляется формулой (4); отсюда, между прочим, следует единственность решения уравнения Абеля.

Докажем теперь, что функция (4) на самом деле решает уравнение Абеля. Подставим эту функцию в левую часть уравнения (1) и положим

$$\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^x \frac{F'(s)}{(x-s)^\alpha} ds = g(x); \quad (5)$$

достаточно доказать, что $g(x) = f(x)$. Рассматривая равенство (5) как уравнение Абеля с неизвестной $F'(x)$ и применяя к этому

уравнению только что описанный прием, получим

$$\int_a^x F'(s) ds = F(x) - F(a) = \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt. \quad (6)$$

Выполнив в интеграле (3) подстановку $t = a + y(x-a)$, найдем

$$F(x) = (x-a)^\alpha \int_0^1 \frac{f(a+y(x-a))}{(1-y)^{1-\alpha}} dy,$$

откуда следует, что $F(a) = 0$, и равенство (6) дает

$$F(x) = \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$$

сравнив это с формулой (3), получим

$$\int_a^x \frac{\omega(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = 0, \quad \omega(t) = g(t) - f(t). \quad (7)$$

Уравнение (7) есть однородное уравнение Абеля с неизвестной $\omega(x)$; оно имеет очевидное решение $\omega(x) \equiv 0$, которое, как доказано выше, единственно. Таким образом, из уравнения (7) необходимо следует, что $\omega(x) \equiv 0$ и $g(x) \equiv f(x)$.

Нетрудно изучить уравнения, аналогичные абелевым, но с большим числом независимых переменных. Для примера рассмотрим уравнение

$$\int_{\sigma_0} \int \frac{\varphi(x, y) dx dy}{\sqrt{(y_0 - y)^2 - (x_0 - x)^2}} = f(x_0, y_0), \quad (8)$$

где σ_0 — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой на оси OX и с вершиной в точке (x_0, y_0) (черт. 3). Чтобы решить уравнение (8), умножим обе его части на

$$\frac{dx_0 dy_0}{\sqrt{(y_1 - y_0)^2 - (x_1 - x_0)^2}}$$

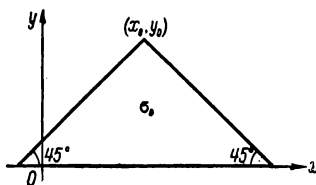
и проинтегрируем по области σ_1 , представляющей собой равнобедренный прямоугольный треугольник в плоскости x_0, y_0 , имеющий вершину в точке (x_1, y_1) и гипотенузу на оси OX_0 (черт. 4). В результате получим

$$\int_{\sigma_1} \int \int_{\sigma_0} \frac{\varphi(x, y) dx dy dx_0 dy_0}{\sqrt{(y_1 - y_0)^2 - (x_1 - x_0)^2} \sqrt{(y_0 - y)^2 - (x_0 - x)^2}} = \\ = g(x_1, y_1); \quad (9)$$

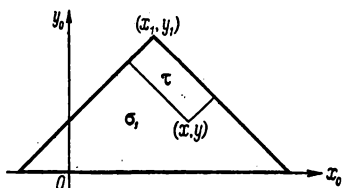
мы ввели обозначение

$$g(x_1, y_1) = \int_{\sigma_1} \int \frac{f(x_0, y_0) dx_0 dy_0}{V(y_1 - y_0)^2 - (x_1 - x_0)^2}.$$

Изменим порядок интегрирования. Нетрудно убедиться, что



Черт. 3



Черт. 4

тогда точка (x, y) будет изменяться в треугольнике σ_1 , а точка (x_0, y_0) — в прямоугольнике τ (черт. 4). Теперь имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_1} \int \varphi(x, y) dx dy \times \\ & \times \int_{\tau} \int \frac{dx_0 dy_0}{V(y_1 - y_0)^2 - (x_1 - x_0)^2 V(y_0 - y)^2 - (x_0 - x)^2} = g(x_1, y_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Для вычисления внутреннего интеграла введем вместо x_0 и y_0 новые переменные

$$\lambda = \frac{(y_0 - y) + (x_0 - x)}{(y_1 - y) + (x_1 - x)}, \quad \mu = \frac{(y_0 - y) - (x_0 - x)}{(y_1 - y) - (x_1 - x)}.$$

В прямоугольнике τ каждая из переменных λ и μ меняется в пределах от 0 до 1. В новых переменных внутренний интеграл в уравнении (10) сводится к такому:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{d\lambda d\mu}{V\lambda\mu(1-\lambda)(1-\mu)} = \pi^2,$$

и уравнение принимает вид

$$\int_{\sigma_1} \int \varphi(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi^2} g(x_1, y_1). \quad (11)$$

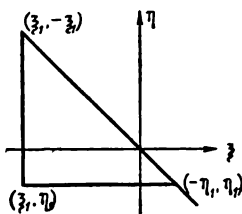
Чтобы решить уравнение (11), повернем оси координат на -135° . Формулы преобразования имеют вид

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\xi - \eta), \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + \eta).$$

Положим еще

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_1 - \eta_1), \quad y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_1 + \eta_1).$$

Треугольник σ_1 (черт. 4) преобразуется в треугольник на черт. 5. Обозначим



Черт. 5

$$\varphi(x, y) = \Phi(\xi, \eta), \quad \frac{1}{\pi^2} g(x_1, y_1) = G(\xi_1, \eta_1),$$

тогда

$$\int_{\xi_1}^{-\eta_1} d\xi \int_{\eta_1}^{-\xi} \Phi(\xi, \eta) d\eta = G(\xi_1, \eta_1).$$

Дифференцируя, найдем

$$\Phi(\xi_1, \eta_1) = \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_1 \partial \eta_1}$$

или, если вернуться к старым переменным и писать x и y вместо x_1 и y_1 ,

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right). \quad (12)$$

Как и в случае одной независимой переменной, можно доказать, что функция (12) на самом деле удовлетворяет уравнению (8).

Уравнение (8) встречается при исследовании отражения волн от прямолинейной границы.

Вернемся к формуле (4). Положив в ней $\alpha = \frac{1}{2}$ и заменив $f(x)$ на $-\sqrt{2g}f(y)$, получим решение задачи Абеля, упомянутой в историческом очерке

$$\varphi(y) = -\frac{\sqrt{2g}}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{f(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta.$$

Интересен частный случай задачи Абеля, когда $f(y) = t_0 = \text{const}$ в этом случае тяжелая материальная точка достигает наинизшего положения за один и тот же промежуток времени t_0 , независимо от того, на какой высоте эта точка начала свой путь. Кривая, решающая задачу Абеля в этом случае, называется *таутохроной*. Найдем уравнения таутохроны.

Имеем

$$\varphi(y) = -\frac{t_0 \sqrt{2g}}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = -\sqrt{\frac{2c}{y}},$$

где положено $c = \frac{gt_0^2}{\pi^2}$. Если α — угол между касательной к таутохроне и осью x , то

$$\sin \alpha = \frac{1}{\varphi(y)} = -\sqrt{\frac{y}{2c}}.$$

Дифференцируя, найдем $dy = 2c \sin 2\alpha d\alpha$, откуда при подходящем выборе постоянной интегрирования следует

$$y = c(1 - \cos 2\alpha). \quad (*)$$

Далее, $dx = \operatorname{ctg} \alpha dy = 4c \cos^2 \alpha d\alpha$; выбирая опять должным образом постоянную интегрирования, найдем

$$x = c(2\alpha + \sin 2\alpha). \quad (**)$$

Полученные уравнения показывают, что таутохрона есть *циклоида*.

§ 7. Понятие о резольвенте

Вернемся к уравнению Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (1)$$

Пусть $|\lambda| < \frac{1}{B}$. Тогда уравнение (1) имеет единственное квадратично суммируемое решение, которое можно представить в виде ряда Неймана

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K^m f$$

или, более подробно,

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x, s) f(s) ds. \quad (2)$$

Нашей ближайшей целью является доказательство того, что в ряде (2) можно переставить порядок суммирования и

интегрирования. Выполним пока эту перестановку формально; это приведет нас к выражению

$$f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s) f(s) ds. \quad (3)$$

Докажем, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s) \quad (4)$$

сходится при $|\lambda| < \frac{1}{B}$ в среднем в основном квадрате. Действительно, норма $\|K(x, s)\|$ ядра, рассматриваемого как функция переменных x и s в основном квадрате, равна величине B ; неравенство (16) § 3 означает, что $\|K_m(x, s)\| \leq B^m$. Теперь

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=n+1}^{n+p} \lambda^{m-1} K_m(x, s) \right\| &\leq \sum_{m=n+1}^{n+p} |\lambda|^{m-1} \cdot \|K_m(x, s)\| \leq \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{n+p} |\lambda|^{m-1} B^m \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |\lambda|^{m-1} B^m = \frac{|\lambda|^n B^{n+1}}{1 - |\lambda| B} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

и наше утверждение доказано.

Сумма ряда (4) называется *резольвентой* ядра $K(x, s)$, или уравнения (1), и обозначается обычно через $\Gamma(x, s; \lambda)$, так что

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s). \quad (5)$$

Будучи суммой сходящегося в среднем в основном квадрате ряда, резольвента квадратично суммируема в основном квадрате.

Заметим, что ряд (5) определяет резольвенту в круге $|\lambda| < \frac{1}{B}$ комплексной λ -плоскости.

Теперь докажем, что ряд (5) можно интегрировать почленно по s , предварительно умножив его на произвольную квадратично суммируемую функцию $f(s)$, иначе говоря,

что справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} \int_a^b K_m(x, s) f(s) ds = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K^m f. \end{aligned} \quad (6)$$

Для доказательства достаточно оценить норму разности между левой частью формулы (6) и частичной суммой ее правой части. Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds - \sum_{m=1}^n \lambda^{m-1} \int_a^b K_m(x, s) f(s) ds \right\|^2 = \\ = \left\| \int_a^b \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s) f(s) ds \right\|^2 = \\ = \int_a^b \left| \int_a^b \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s) f(s) ds \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл оценим по неравенству Буняковского. Используя затем неравенство треугольника и неравенство (17) § 3, получим

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \int_a^b \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s) f(s) ds \right|^2 dx \leq \\ \leq \|f\|^2 \int_a^b \int_a^b \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s) \right|^2 dx ds = \\ = \|f\|^2 \cdot \left\| \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s) \right\|^2 \leq \\ \leq \|f\|^2 \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} |\lambda|^{m-1} B^m \right)^2 = \|f\|^2 \frac{|\lambda|^{2n-2} B^{2n}}{(1-|\lambda| B)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Тем самым равенство (6) установлено. Теперь формуле (2), дающей решение уравнения Фредгольма, можно придать новый вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds. \quad (7)$$

Применение формулы (7) избавляет от необходимости проводить процесс последовательных приближений.

Введя упрощенное обозначение

$$\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds = \Gamma_\lambda f,$$

можно формулу (7) представить в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \Gamma_\lambda f. \quad (8)$$

В заключение сделаем некоторые замечания относительно характера зависимости резольвенты от параметра. Ряд (5) определяет резольвенту в круге $|\lambda| < \frac{1}{B}$ комплексной λ -плоскости для почти всех значений x и s . Строго говоря, резольвенту, хотя она и представляется степенным рядом, нельзя считать аналитической функцией от λ в упомянутом круге, так как при некоторых x или s ряд (5) может и расходиться. Легко видеть, однако, что если $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные квадратично суммируемые в промежутке (a, b) функции, то интеграл

$$\left(\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds, g(x) \right) = \int_a^b \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) \overline{g(x)} ds dx$$

есть аналитическая функция от λ в круге $|\lambda| < \frac{1}{B}$. Действительно, мы выяснили выше, что ряд (5) можно интегрировать почленно, предварительно умножив его на произвольную квадратично суммируемую функцию $f(x)$; полученный в результате ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int_a^b K_n(x, s) f(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K^n f = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds \quad (9)$$

сходится в среднем по x , если только $|\lambda| < \frac{1}{B}$. Составим теперь скалярное произведение

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds, g(x) \right) &= \int_a^b \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) \overline{g(x)} dx ds = \\ &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K^n f \cdot \overline{g(x)} dx, \end{aligned}$$

где $g(x)$ — произвольная квадратично суммируемая функция. Докажем, что последний ряд можно интегрировать почленно. Действительно, по неравенству Буняковского

$$\left| \int_a^b \sum_{n=N+1}^{N+p} \lambda^{n-1} K^n f \cdot \overline{g(x)} dx \right| \leq \left[\int_a^b \left| \sum_{n=N+1}^{N+p} \lambda^{n-1} K^n f \right|^2 dx \right]^{1/2} \|g\|,$$

что стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$ в силу сходимости в среднем ряда (9). Теперь имеем

$$\int_a^b \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) \overline{g(x)} dx ds = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} (K^n f, g). \quad (10)$$

Ряд (10) есть степенной ряд с числовыми коэффициентами, сходящийся в круге $|\lambda| < \frac{1}{B}$, и его сумма есть функция от λ , аналитическая в упомянутом круге. В этом смысле мы впредь и будем говорить, что резольвента есть аналитическая функция от λ в круге $|\lambda| < \frac{1}{B}$.

В последующем нам придется рассматривать функции вида $a(x; \lambda)$ или $A(x, s; \lambda)$. Будем говорить, что функция $a(x; \lambda)$ аналитична (соответственно, мероморфна) в некоторой области λ -плоскости, если в этой области аналитично (соответственно, мероморфно) скалярное произведение

$$(a(x; \lambda), g(x)) = \int_a^b a(x; \lambda) \overline{g(x)} dx,$$

какова бы ни была квадратично суммируемая функция $g(x)$. Точно также будем называть функцию $A(x, s; \lambda)$ аналити-

ческой или мероморфной в данной области λ -плоскости, если при любых квадратично суммируемых функциях $f(x)$ и $g(x)$ в указанной области аналитичен или мероморфен интеграл

$$\int_a^b \int_a^b A(x, s; \lambda) f(s) \overline{g(x)} ds.$$

§ 8. Системы линейных алгебраических уравнений

В теории интегральных уравнений большую роль играют известные из линейной алгебры теоремы, относящиеся к решению систем линейных алгебраических уравнений. В настоящем параграфе мы приведем, большей частью без доказательств, те теоремы теории линейных алгебраических систем, которые нам понадобятся дальше. Подробно эта теория изложена, например, в „Курсе высшей математики“ В. И. Смирнова, т. III, ч. 2-я.

Будем рассматривать системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных, т. е. системы вида

$$\sum_{m=1}^n a_{km} x_m = b_k; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Числа x_1, x_2, \dots, x_n и b_1, b_2, \dots, b_n будем трактовать как координаты векторов-столбцов x и b , а коэффициенты a_{km} как элементы квадратной матрицы n -го порядка $A = \|a_{km}\|$. Тогда систему (1) можно записать как одно векторное уравнение

$$Ax = b. \quad (2)$$

Напомним построение сопряженной матрицы: чтобы получить матрицу A^* , сопряженную с A , достаточно построить транспонированную матрицу и заменить ее элементы комплексно сопряженными. Таким образом, если $A = \|a_{km}\|$, то $A^* = \|\overline{a_{mk}}\|$. Система уравнений

$$A^* y = c,$$

или, в развернутой записи,

$$\sum_{m=1}^n \overline{a_{mk}} y_m = c_k; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

называется *сопряженной* с системой (1); вектор c , входящий в правую часть сопряженной системы, может быть каким угодно.

Определители двух сопряженных матриц суть величины комплексно сопряженные и потому они одновременно обращаются или не обращаются в нуль; сопряженные матрицы имеют один и тот же ранг.

Будем считать известными следующие теоремы о линейных алгебраических системах.

Теорема 1. *Если определитель системы отличен от нуля, то как данная система, так и система, с ней сопряженная, разрешима при любых свободных членах, и решение той и другой системы единственно. Однородная система имеет в этом случае только тривиальное (нулевое) решение.*

Теорема 2. *Если определитель системы равен нулю, то однородные системы $Ax = 0$ и $A^*y = 0$ имеют каждая $p = n - r$ линейно независимых решений, где r — ранг матрицы A .*

Заметим, что если $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ и $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(p)}$ суть линейно независимые решения систем $Ax = 0$ и $A^*y = 0$ соответственно, то общие решения этих систем имеют вид

$$x = \sum_{j=1}^p \gamma_j x^{(j)}, \quad y = \sum_{j=1}^p \gamma_j^* y^{(j)}, \quad (4)$$

где γ_j и γ_j^* произвольные постоянные.

Теорема 3. *Для того, чтобы неоднородная система (1) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A не изменялся от прибавления к ней столбца свободных членов.*

Заметим, что если определитель системы (1) равен нулю, а система разрешима, то она имеет бесконечно много решений: прибавив к какому-либо решению системы (1) любое решение соответствующей однородной системы, мы опять получим решение системы (1). Если определитель системы (1) равен нулю, и при этом ранг матрицы A равен r , то общее решение системы (1) имеет вид

$$x = x^{(0)} + \sum_{j=1}^p \gamma_j x^{(j)}, \quad (5)$$

где $x^{(0)}$ — частное решение системы, а $x^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, p$ — линейно независимые решения однородной системы $Ax = 0$.

Теорему 3 можно заменить следующей ей эквивалентной, которой мы и будем пользоваться.

Теорема 4. *Для того, чтобы неоднородная система (1) линейных алгебраических уравнений была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы вектор свободных членов этой системы был ортогонален ко всем решениям сопряженной однородной системы.*

Приведем доказательство этой теоремы¹⁾. Предварительно напомним, что векторы x и y ортогональны, если

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k = 0.$$

Обозначим через A_k вектор, образованный элементами k -го столбца матрицы A :

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Систему (1) можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^n x_m A_m = b;$$

эта запись показывает, что система (1) разрешима тогда и только тогда, когда вектор b есть линейная комбинация векторов A_k , иначе говоря, когда вектор b принадлежит подпространству, порожденному векторами A_1, A_2, \dots, A_n . Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор b был ортогонален к каждому вектору, ортогональному ко всем векторам A_k . Пусть y такой вектор, и пусть y_1, y_2, \dots, y_n — его составляющие. Требование $(y, A_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, равносильно тому, что

$$\sum_{m=1}^n \bar{a}_{mk} y_m = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

¹⁾ Приводимое ниже доказательство было указано автору Д. К. Фаддеевым.

т. е. у есть решение однородной системы, сопряженной с системой (1). Таким образом, для разрешимости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы вектор b был ортогонален к любому решению сопряженной однородной системы, что и требовалось доказать.

§ 9. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами

Ядро $K(x, s)$ называется *вырожденным*, если его можно представить в виде конечной суммы произведений двух функций, из которых одна зависит только от x , а другая только от s . Вырожденное ядро имеет вид

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(s). \quad (1)$$

Можно считать, что функции $a_k(x)$, так же как и функции $b_k(s)$, между собой линейно независимы — в противном случае можно было бы уменьшить число слагаемых в сумме (1).

Будем считать, что функции $a_k(x)$ и $b_k(s)$ квадратично суммируемы в основном промежутке (a, b) — тогда ядро $K(x, s)$ квадратично суммируемо в основном квадрате.

Подставив в интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds - f(x) = 0 \quad (2)$$

вместо $K(x, s)$ его выражение (1), мы приведем это уравнение к виду

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_a^b b_k(s) \varphi(s) ds - f(x) = 0. \quad (3)$$

Допустим, что уравнение (3) имеет решение. Введя обозначение

$$\int_a^b b_k(s) \varphi(s) ds = C_k, \quad (4)$$

получим равенство

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x), \quad (5)$$

из которого видно, что решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к определению постоянных C_k .

В равенстве (5) заменим обозначение индекса суммирования k на m , затем обе части этого равенства умножим на $b_k(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от a до b . Введя обозначения

$$\int_a^b a_m(s) b_k(s) ds = \alpha_{km},$$

$$\int_a^b f(s) b_k(s) ds = f_k, \quad (6)$$

получим систему, которой необходимо удовлетворяют коэффициенты C_k :

$$C_k - \lambda \sum_{m=1}^n \alpha_{km} C_m = f_k; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Если эта система неразрешима, то, очевидно, интегральное уравнение (2) также неразрешимо. Допустим теперь, что система (7) имеет решение C_1, C_2, \dots, C_n . Подставим эти коэффициенты в равенство (5) и докажем, что построенная таким образом функция $\varphi(x)$ есть решение уравнения (2). Для этого подставим в уравнение (2) вместо $\varphi(x)$ выражение (5). Произведя некоторые очевидные преобразования, мы приведем левую часть уравнения к виду

$$\lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \left\{ C_k - \int_a^b b_k(s) \left[f(s) + \lambda \sum_{m=1}^n C_m a_m(s) \right] ds \right\},$$

что равно нулю в силу уравнений (7).

Из сказанного ясно, что интегральное уравнение (2) и система линейных алгебраических уравнений (7) эквивалентны.

Определитель системы (7) равен

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \alpha_{11} & -\lambda \alpha_{12} & \dots & -\lambda \alpha_{1n} \\ -\lambda \alpha_{21} & 1 - \lambda \alpha_{22} & \dots & -\lambda \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda \alpha_{n1} & -\lambda \alpha_{n2} & \dots & 1 - \lambda \alpha_{nn} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

$D(\lambda)$ есть полином относительно λ степени не выше n ; этот полином отличен от тождественного нуля, так как

$$D(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Но тогда этот полином имеет не более n различных корней. Если λ не совпадает ни с одним из этих корней, то наше интегральное уравнение с вырожденным ядром имеет решение при любом свободном члене, и это решение единственное; соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное (т. е. тождественно равное нулю) решение. Если же λ совпадает с одним из корней определителя $D(\lambda)$, то при произвольно взятом свободном члене интегральное уравнение, вообще говоря, неразрешимо. Соответствующее однородное интегральное уравнение имеет при этом нетривиальные (т. е. отличные от тождественного нуля) решения.

Нетрудно установить их вид. Если уравнение (2) однородное, то $f(x) \equiv 0$. Тогда $f_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, и система (7) делается однородной. Ее определитель равен нулю и потому эта система имеет некоторое число p , $1 \leq p \leq n$, линейно независимых нетривиальных решений. Пусть эти решения суть $C_k^{(j)}$; $k = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, p$. Тогда функции

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^n C_k^{(j)} a_k(x); \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (9)$$

суть нетривиальные решения однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = 0, \quad (10)$$

ядро $K(x, s)$ которого определено формулой (1).

Как известно (см. формулу (4) § 8), всякое решение однородной системы, соответствующей системе (7), имеет вид

$$C_k = \sum_{j=1}^p \gamma_j C_k^{(j)},$$

где γ_j произвольные постоянные. Учтя эквивалентность системы (7) и уравнения (2), мы легко убедимся в том, что общее решение уравнения (10) при значении λ , совпадающем с каким-либо корнем определителя $D(\lambda)$, имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^p \gamma_j \varphi_j(x), \quad (11)$$

где γ_j — произвольные постоянные.

§ 10. Общий случай уравнения Фредгольма

Решение интегрального уравнения Фредгольма с невырожденным ядром можно заменить решением двух интегральных уравнений, одно из которых разрешимо по методу последовательных приближений, или, что то же, через посредство резольвенты, а другое уравнение имеет вырожденное ядро.

Такую замену можно осуществить многими способами; ниже мы приводим два таких способа, основанных на разложении ядра в двойной ряд Фурье.

Рассмотрим уравнение Фредгольма общего вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (1)$$

Его ядро квадратично суммируемо в основном квадрате, так что интеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds = B^2$$

конечен.

Пусть $\varphi_k(x)$; $k = 1, 2, \dots$ — ортонормированная и полная в промежутке (a, b) система функций. Тогда, как мы видели (см. § 2), система

$$\varphi_k(x) \varphi_m(s); \quad k, m = 1, 2, \dots \quad (2)$$

ортонормирована и полна в основном квадрате, в котором ядро $K(x, s)$ квадратично суммируемо и потому разлагается

в ряд Фурье по функциям (2)

$$K(x, s) = \sum_{k, m=1}^{\infty} A_{km} \varphi_k(x) \varphi_m(s), \quad (3)$$

сходящийся в основном квадрате в среднем. Так как система (2) полна, то имеет место уравнение замкнутости, которое в применении к функции $K(x, s)$ дает

$$\sum_{k, m=1}^{\infty} |A_{km}|^2 = B^2. \quad (4)$$

Зададим теперь произвольное число $R > 0$ и будем рассматривать уравнение (1) только при тех значениях λ , которые лежат в круге $|\lambda| \leq R$.

Из ряда (3) выделим частичную сумму

$$K''(x, s) = \sum_{k, m=1}^n A_{km} \varphi_k(x) \varphi_m(s). \quad (5)$$

Очевидно, $K''(x, s)$ представляет собой вырожденное ядро. Положим еще

$$K(x, s) - K''(x, s) = K'(x, s). \quad (6)$$

Ряд Фурье функции $K'(x, s)$ представляет собой остаток ряда Фурье функции $K(x, s)$

$$K'(x, s) = \sum_{k > n, m > n} A_{km} \varphi_k(x) \varphi_m(s). \quad (7)$$

Применяя опять уравнение замкнутости и обозначая

$$B'^2 = \int_a^b \int_a^b |K'(x, s)|^2 dx ds,$$

имеем

$$B'^2 = \sum_{k > n, m > n} |A_{km}|^2. \quad (8)$$

Ряд (8) есть остаток сходящегося ряда (4) и потому его сумма сколь угодно мала, если только n достаточно велико. Выберем n столь большим, чтобы было $B' < \frac{1}{2R}$. Тогда

$$|\lambda| B' < \frac{1}{2}.$$

Таким образом, по формуле (6) ядро $K(x, s)$ разбито на сумму двух ядер

$$K(x, s) = K'(x, s) + K''(x, s) \quad (6a)$$

из которых первое имеет характер малого ядра, а второе — характер ядра вырожденного.

В последующем будем говорить, что формула (6a) представляет собой разбиение ядра $K(x, s)$ на сумму ядер малого и вырожденного.

Подставим разложение (6a) в уравнение (1), которое перепишем следующим образом

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K'(x, s) \varphi(s) ds = f(x) + \lambda \int_a^b K''(x, s) \varphi(s) ds. \quad (9)$$

1. Первый из упомянутых выше способов сведения уравнения Фредгольма к уравнению с вырожденным ядром состоит в следующем. Вводим новую неизвестную функцию $\psi(x)$, полагая

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K'(x, s) \varphi(s) ds = \psi(x). \quad (10)$$

Чтобы выразить $\varphi(x)$ через новую неизвестную $\psi(x)$, надо, очевидно, решить интегральное уравнение (10). Но $|\lambda| B' < \frac{1}{2}$; по теореме 1 § 4 уравнение (10) разрешимо и имеет единственное решение. Если резольвенту уравнения (10) обозначить через $\Gamma'(x, s; \lambda)$, то решение этого уравнения по формуле (8) § 7 запишется в виде

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda) \psi(s) ds. \quad (11)$$

Подставив решение (11) в формулу (9), получим новое интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (1):

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K''(x, s) \left\{ \psi(s) + \lambda \int_a^b \Gamma'(s, t; \lambda) \psi(t) dt \right\} ds = f(x). \quad (12)$$

Докажем, что ядро уравнения (12) вырожденное. Преобразуем уравнение (12), заменив во внутреннем интеграле обозначения переменных интегрирования t, s на s, t и изменив порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\begin{aligned} \psi(x) - \lambda \int_a^b \psi(s) \left\{ K''(x, s) + \right. \\ \left. + \lambda \int_a^b K''(x, t) \Gamma'(t, s; \lambda) dt \right\} ds = f(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Ядром этого уравнения является выражение, стоящее в фигурных скобках.

Как уже было упомянуто, $K''(x, s)$ — вырожденное ядро. Рассмотрим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_a^b K''(x, t) \Gamma'(t, s; \lambda) dt = \\ = \int_a^b \sum_{k, m=1}^n A_{km} \varphi_k(x) \varphi_m(t) \Gamma'(t, s; \lambda) dt = \\ = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \int_a^b \sum_{m=1}^n A_{km} \varphi_m(t) \Gamma'(t, s; \lambda) dt. \end{aligned}$$

Здесь интеграл есть функция только от s , значит и второе слагаемое в ядре уравнения (13) есть сумма произведений функций, из которых одна зависит только от x , а другая только от s .

Введем обозначения:

$$\varphi_k(x) = a_k(x),$$

$$\sum_{m=1}^n A_{km} \left\{ \varphi_m(s) + \lambda \int_a^b \Gamma'(s, t; \lambda) \varphi_m(t) dt \right\} = b_k(s, \lambda);$$

Тогда ядро уравнения (13) принимает вид

$$\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(s, \lambda),$$

и ясно, что это ядро вырожденное. Уравнение (13) теперь записывается в виде

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(s, \lambda) \psi(s) ds = f(x). \quad (14)$$

З а м е ч а н и е. Резольвента Γ' регулярна в круге $|\lambda| < \frac{1}{B'}$, но $B' < \frac{1}{2R}$, поэтому резольвента регулярна в круге $|\lambda| < 2R$ и тем более в замкнутом круге $|\lambda| \leq R$. Отсюда следует, что в том же замкнутом круге регулярны и функции $b_k(s, \lambda)$.

2. Укажем теперь второй способ сведения общего уравнения Фредгольма к уравнению с вырожденным ядром. Правую часть уравнения (9), которую обозначим через $F(x)$, будем рассматривать как величину известную. Мы получим тогда уравнение с параметром, удовлетворяющим условию $|\lambda| B' < 1$; решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda) F(s) ds.$$

Подставив сюда вместо $F(x)$ его значение, получим

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda) f(s) ds + \\ & + \lambda \int_a^b K''(x, s) \varphi(s) ds + \\ & + \lambda^2 \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda) ds \int_a^b K''(s, t) \varphi(t) dt, \end{aligned}$$

или, если в двойном интеграле изменить порядок и обозначение переменных интегрирования,

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \int_a^b \left\{ K''(x, s) + \right. \\ \left. + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) K''(t, s) dt \right\} \varphi(s) ds = \\ = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda) f(s) ds. \quad (15) \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему легко доказать, что уравнение (15) имеет вырожденное ядро. Заметим, что свободный член этого уравнения равен

$$f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda) f(s) ds.$$

З а м е ч а н и е. При практическом решении уравнения (1) целесообразно остаток $K'(x, s)$ в разбиении (6а) сделать столь малым, чтобы им можно было пренебречь, тогда сразу получается уравнение с вырожденным ядром для неизвестной $\varphi(x)$.

Вернемся к уравнению (14). Обозначим

$$\begin{aligned} \alpha_{km} &= \int_a^b a_m(s) b_k(s, \lambda) ds, \\ C_k &= \int_a^b \psi(s) b_k(s, \lambda) ds, \\ f_k &= \int_a^b f(s) b_k(s, \lambda) ds. \end{aligned}$$

По способу, изложенному в § 9, для коэффициентов C_k получается линейная алгебраическая система

$$C_k - \lambda \sum_{m=1}^n \alpha_{km} C_m = f_k; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

где коэффициенты α_{km} суть функции параметра λ , регулярные в замкнутом круге $|\lambda| \leq R$.

Определитель системы (16)

$$D_R(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11}, & -\lambda\alpha_{12}, & \dots, & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21}, & 1 - \lambda\alpha_{22}, & \dots, & -\lambda\alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda\alpha_{n1}, & -\lambda\alpha_{n2}, & \dots, & 1 - \lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

есть регулярная функция от λ в круге $|\lambda| \leq R$. Если λ таково, что $D_R(\lambda) \neq 0$, то система (16) разрешима, каковы бы ни были ее свободные члены f_k , и решение ее единственно, а тогда исходное интегральное уравнение (1) также разрешимо и имеет единственное решение. Действительно, из результатов § 9 следует, что в этом случае уравнение (14) имеет решение, и притом единственное, которое можно представить в виде

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x).$$

Подставив значение $\psi(x)$ в формулу (11), мы найдем функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую данному интегральному уравнению (1), и ясно, что это решение единственное.

Если $D_R(\lambda) \neq 0$, а $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) имеет только тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$.

Пусть теперь $D_R(\lambda) = 0$. Система (16) тогда, вообще говоря, неразрешима, а следовательно, вообще говоря, неразрешимо и данное интегральное уравнение. Предполагая, что $D_R(\lambda) = 0$, рассмотрим однородное интегральное уравнение:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = 0. \quad (17)$$

Указанным выше способом заменим его однородным интегральным уравнением для вспомогательной неизвестной $\psi(x)$

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(s) \psi(s) ds = 0; \quad (18)$$

оно получается из уравнения (14) при $f(x) \equiv 0$. Уравнение (18) в свою очередь сводится к однородной системе линейных

алгебраических уравнений и, коль скоро определитель этой системы равен нулю, то она имеет нетривиальные решения. Если через r обозначить ранг матрицы системы, то число линейно независимых решений упомянутой системы будет равно $p = n - r$, $1 \leq p \leq n$.

Обозначим линейно независимые решения однородной алгебраической системы через

$$C_1^{(j)}, C_2^{(j)}, \dots, C_n^{(j)}; \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Зная эти решения, можно по формуле (9) § 9 построить решения однородного уравнения (18):

$$\psi^{(j)}(x) = \lambda \sum_{k=1}^n C_k^{(j)} a_k(x), \quad (19)$$

и тогда решения уравнения (17) найдутся по формуле (11)

$$\varphi^{(j)}(x) = \psi^{(j)}(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda) \psi^{(j)}(s) ds. \quad (20)$$

Функции $\varphi^{(j)}(x)$ и $\psi^{(j)}(x)$, очевидно, связаны между собой также и соотношением

$$\begin{aligned} \psi^{(j)}(x) &= \varphi^{(j)}(x) - \lambda K' \varphi^{(j)} = \\ &= \varphi^{(j)}(x) - \lambda \int_a^b K'(x, s) \varphi^{(j)}(s) ds, \end{aligned} \quad (21)$$

вытекающим из формулы (10).

Докажем, что полученные таким образом решения $\varphi^{(j)}(x)$ линейно независимы. Допустим противное. Пусть существуют такие постоянные $\alpha^{(j)}$, что

$$\sum_{j=1}^p \alpha^{(j)} \varphi^{(j)}(x) \equiv 0.$$

Составим аналогичную сумму для функций $\psi^{(j)}(x)$. В силу соотношения (21)

$$\sum_{j=1}^p \alpha^{(j)} \psi^{(j)}(x) = \sum_{j=1}^p \alpha^{(j)} \varphi^{(j)}(x) - \lambda K' \left(\sum_{j=1}^p \alpha^{(j)} \varphi^{(j)} \right) \equiv 0. \quad (22)$$

Подставляя в тождество (22) вместо $\psi^{(j)}(x)$ их значения (19) и меняя порядок суммирования, получим

$$\sum_{j=1}^p \alpha^{(j)} \sum_{k=1}^n C_k^{(j)} a_k(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \sum_{j=1}^p \alpha^{(j)} C_k^{(j)} = 0.$$

Так как функции $a_k(x)$ линейно независимы, то отсюда необходимо следует равенство нулю коэффициентов при $a_k(x)$:

$$\sum_{j=1}^p \alpha^{(j)} C_k^{(j)} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Последние равенства равносильны одному векторному равенству

$$\sum_{j=1}^p \alpha^{(j)} C^{(j)} = 0,$$

в котором $C^{(j)}$ означает вектор с составляющими

$$C_1^{(j)}, C_2^{(j)}, \dots, C_n^{(j)}.$$

Так как векторы $C^{(j)}$ линейно независимы, то необходимо $\alpha^{(j)} = 0$; $j = 1, 2, \dots, p$ и, следовательно, функции $\varphi^{(j)}(x)$ линейно независимы.

Итак, если $D_R(\lambda) = 0$, то однородное интегральное уравнение (17) имеет p линейно независимых решений $\varphi^{(j)}(x)$, где

$$j = 1, 2, \dots, p; \quad 1 \leq p \leq n.$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (17) можно убедиться, что линейная комбинация этих решений

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^p \gamma_j \varphi^{(j)}(x) \quad (23)$$

также является решением уравнения (17). Очевидно, формула (23) содержит все решения однородного интегрального уравнения (17).

Рассмотрим теперь неоднородное интегральное уравнение (1), предполагая, что $D_R(\lambda) = 0$. Это уравнение в общем случае неразрешимо; докажем, что если оно имеет хотя бы одно решение $\varphi_0(x)$, то таких решений бесконечно много.

Введем новую неизвестную функцию $\Phi(x)$, положив

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \Phi(x). \quad (24)$$

Подставив выражение (24) в уравнение (1), получим:

$$\varphi_0(x) + \Phi(x) - \lambda K\varphi_0 - \lambda K\Phi = f(x).$$

Но по условию $\varphi_0(x)$ есть решение неоднородного уравнения (1), поэтому

$$\varphi_0(x) - \lambda K\varphi_0 = f(x)$$

и, следовательно,

$$\Phi(x) - \lambda K\Phi = 0,$$

что означает, что новая неизвестная функция $\Phi(x)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению. Так как $D_R(\lambda) = 0$, то это уравнение имеет бесконечно много решений, даваемых формулой

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^p \gamma_j \varphi^{(j)}(x).$$

Но тогда неоднородное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений: все они содержатся в формуле

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^p \gamma_j \varphi^{(j)}(x). \quad (25)$$

в которой γ_j суть произвольные постоянные.

Как уже было отмечено выше, $D_R(\lambda)$ есть регулярная функция от λ в круге $|\lambda| \leq R$; она отлична от тождественного нуля, так как $D_R(0) = 1$, и потому в круге $|\lambda| \leq R$ она имеет только конечное число нулей.

Введем теперь следующие определения. Значения параметра λ , при которых однородное интегральное уравнение (17) имеет только тривиальное решение, будем называть *правильными*, а значение того же параметра, при котором однородное интегральное уравнение имеет нетривиальные решения — *характеристическим* числом данного ядра $K(x, s)$ или соответствующего ему интегрального уравнения. Нетривиальные решения однородного интегрального уравнения называются *собственными функциями* этого уравнения или его ядра, соответствующими данному характеристическому числу.

Из проведенного выше анализа сразу вытекает:

а) *характеристические числа, расположенные в круге $|\lambda| \leq R$, совпадают с расположенными в этом круге корнями определителя $D_R(\lambda)$,*

б) *при правильном значении λ неоднородное интегральное уравнение разрешимо, каков бы ни был его свободный член; решение интегрального уравнения в этом случае — единственное.*

в) *данному характеристическому числу соответствует только конечное число линейно независимых собственных функций,*

г) *если при характеристическом значении λ неоднородное интегральное уравнение разрешимо, то оно имеет бесчисленное множество решений.*

§ 11. Сопряженное уравнение Фредгольма

Пусть дано уравнение

$$\varphi(x) - \lambda K\varphi = f(x),$$

или, более подробно,

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (1)$$

Ядро $K^*(x, s)$, получаемое из данного ядра $K(x, s)$ перестановкой аргументов и заменой полученного выражения на комплексно сопряженное, называется *сопряженным* с данным ядром. Таким образом, по определению

$$K^*(x, s) = \overline{K(s, x)}. \quad (2)$$

Например, если $K(x, s) = x + is$, то

$$K^*(x, s) = \overline{(s + ix)} = s - ix.$$

Если ядро вещественное, то $K^*(x, s) = K(s, x)$.

Уравнение

$$\omega(x) - \bar{\lambda} \int_a^b K^*(x, s) \omega(s) ds = g(x), \quad (3)$$

в котором $g(x)$ — какая угодно квадратично суммируемая функция, называется *сопряженным* с данным уравнением (1). Оператор K^* , определяемый формулой

$$K^*\varphi = \int_a^b K^*(x, s) \varphi(s) ds, \quad (4)$$

называется *сопряженным* с оператором

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds.$$

Если K — оператор Фредгольма, то K^* тоже есть оператор Фредгольма; постоянная B для сопряженных ядер одна и та же.

Сопряженные операторы связаны между собой важным тождеством: если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ произвольные квадратично суммируемые функции, то

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K^*\psi). \quad (C)$$

Доказательство очень просто. По определению скалярного произведения

$$(K\varphi, \psi) = \int_a^b \overline{\psi(x)} K\varphi dx = \int_a^b \int_a^b K(x, s) \varphi(s) \overline{\psi(x)} dx ds,$$

Заменяя обозначения переменных интегрирования x на s и наоборот, получаем

$$\begin{aligned} (K\varphi, \psi) &= \int_a^b \int_a^b K(s, x) \varphi(x) \overline{\psi(s)} dx ds = \\ &= \int_a^b \varphi(x) dx \int_a^b K(s, x) \overline{\psi(s)} ds = \\ &= \int_a^b \varphi(x) dx \int_a^b \overline{K(s, x)} \psi(s) ds = \int_a^b \varphi(x) \cdot \overline{K^*\psi} dx = (\varphi, K^*\psi), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Важно отметить, что сопряженный оператор полностью определяется соотношением (C), именно, если некоторый оператор L удовлетворяет тождеству

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, L\psi), \quad (C a)$$

в котором φ и ψ произвольные квадратично суммируемые функции, то $L\psi \equiv K^*\psi$. Действительно, вычитая из тождества (Ca) тождество (C) находим $(\varphi, L\psi - K^*\psi) = 0$. Зафиксировав как-либо функцию ψ , видим, что разность $L\psi - K^*\psi$ ортогональна к любой квадратично суммируемой функции φ . Но тогда эта разность ортогональна и к самой себе. По свойству 4 скалярного умножения (§ 2), $L\psi \equiv K^*\psi$.

Установим некоторые простые свойства сопряженных операторов.

1. Пусть K и L — два оператора Фредгольма. Имеем

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K^*\psi): \quad (L\varphi, \psi) = (\varphi, L^*\psi),$$

отсюда

$$(K\varphi + L\varphi, \psi) = (\varphi, K^*\psi + L^*\psi).$$

Теперь тождество (C) дает

$$(K + L)^* = K^* + L^*. \quad (5)$$

2. Пусть λ — постоянная. Имеем

$$(\lambda K\varphi, \psi) = (K\varphi, \bar{\lambda}\psi) = (\varphi, K^*(\bar{\lambda}\psi)) = (\varphi, \bar{\lambda}K^*\psi),$$

и из тождества (C) следует, что

$$(\lambda K)^* = \bar{\lambda}K^*.$$

3. Повторное применение тождества (C) дает

$$(KL\varphi, \psi) = (L\varphi, K^*\psi) = (\varphi, L^*K^*\psi).$$

Отсюда

$$(KL)^* = L^*K^*, \quad (6)$$

т. е. оператор, сопряженный произведению, равен произведению сопряженных операторов, взятых в обратном порядке.

Полагая $L = K$, находим, что $(K^2)^* = (K^*)^2$. По индукции легко получается общее соотношение $(K^n)^* = (K^*)^n$, откуда следует соотношение для итерированных ядер

$$K_n^*(x, s) = \overline{K_n(s, x)}. \quad (7)$$

Если $|\lambda| < \frac{1}{B}$, то уравнение (3) разрешимо по методу последовательных приближений, и решение его единственно. Это решение можно построить через резольвенту $\Gamma^*(x, s; \bar{\lambda})$ уравнения (3) по формуле

$$\omega(x) = g(x) + \bar{\lambda} \int_a^b \Gamma^*(x, s; \bar{\lambda}) g(s) ds = g(x) + \bar{\lambda} \Gamma_{\bar{\lambda}}^* g.$$

Резольвента вычисляется по формуле

$$\Gamma^*(x, s; \bar{\lambda}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}^{n-1} K_n^*(x, s).$$

Так как $K_n^*(x, s) = \overline{K_n(s, x)}$, то

$$\Gamma^*(x, s; \bar{\lambda}) = \overline{\Gamma(s, x; \lambda)}.$$

Отсюда, между прочим следует, что операторы Γ_{λ} и $\Gamma_{\bar{\lambda}}^*$ — сопряженные.

Обратимся к исследованию сопряженных интегральных уравнений. Если ядро уравнения (1) вырожденное,

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(s),$$

то, как мы знаем, это уравнение сводится к системе алгебраических уравнений

$$C_k - \lambda \sum_{m=1}^n \alpha_{km} C_m = f_k; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где

$$\alpha_{km} = \int_a^b a_m(x) b_k(x) dx.$$

Уравнение, сопряженное с уравнением (1), имеет вид

$$\omega(x) - \bar{\lambda} K^* \omega = g(x).$$

Его ядро тоже вырожденное

$$K^*(x, s) = \sum_{m=1}^n \overline{b_m(x) a_m(s)},$$

а в таком случае сопряженное уравнение сводится тоже к алгебраической системе. Построим эту систему. Имеем

$$\omega(x) - \bar{\lambda} \sum_{m=1}^n \overline{b_m(x)} \int_a^b \overline{a_m(s)} \omega(s) ds = g(x).$$

Обозначим

$$\int_a^b \overline{a_m(s)} \omega(s) ds = c_m.$$

Тогда уравнение переписется в виде

$$\omega(x) - \bar{\lambda} \sum_{m=1}^n c_m \overline{b_m(x)} = g(x).$$

Умножив обе части этого равенства на $\overline{a_k(x)}$ и проинтегрировав в пределах от a до b , получим

$$c_k - \bar{\lambda} \sum_{m=1}^n \overline{a_{mk}} c_m = g_k; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где

$$g_k = \int_a^b \overline{a_k(x)} g(x) dx.$$

Очевидно, системы (8) и (9) линейных алгебраических уравнений, соответствующие сопряженным интегральным уравнениям с вырожденными ядрами, суть системы сопряженные.

Докажем, что и в общем случае невырожденного ядра можно свести сопряженные интегральные уравнения (1) и (3) к сопряженным линейным системам. Для этого предварительно сведем уравнения (1) и (3) к интегральным уравнениям с вырожденными ядрами. Применив к уравнению (1) первый из способов § 10, получим уравнение [см. уравнение (13) § 10]

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b \left\{ K''(x, s) + \lambda \int_a^b K''(x, t) \Gamma'(t, s; \lambda) dt \right\} \times \\ \times \psi(s) ds = f(x). \quad (10)$$

Чтобы преобразовать уравнение (3), заметим, что если ядро $K(x, s)$ разбито на сумму

$$K(x, s) = K'(x, s) + K''(x, s),$$

то соответственно

$$K^*(x, s) = K'^*(x, s) + K''^*(x, s),$$

причем ядро $K''^*(x, s)$ вырожденное и

$$\int_a^b \int_a^b |K'^*(x, s)|^2 dx ds = \int_a^b \int_a^b |K'(x, s)|^2 dx ds = B'^2.$$

Теперь запишем уравнение (3) в виде

$$\omega(x) - \bar{\lambda} \int_a^b K'^*(x, s) \omega(s) ds = g(x) + \bar{\lambda} \int_a^b K''^*(x, s) \omega(s) ds.$$

Применив второй из способов, указанных в § 10, получим [см. уравнение (15) § 10] интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$\begin{aligned} \omega(x) - \bar{\lambda} \int_a^b \left\{ K'^*(x, s) + \bar{\lambda} \int_a^b \Gamma^*(x, t; \bar{\lambda}) K''^*(t, s) dt \right\} \omega(s) ds = \\ = g(x) + \bar{\lambda} \int_a^b \Gamma^*(x, s; \bar{\lambda}) g(s) ds. \quad (11) \end{aligned}$$

Из формулы (6) следует, что вырожденные ядра уравнений (10) и (11) — сопряженные, а в таком случае, как было сказано выше, эти уравнения сводятся к сопряженным алгебраическим системам.

§ 12. Теоремы Фредгольма

Теорема 1. *Уравнение Фредгольма имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут сгущаться только на бесконечности.*

В комплексной λ -плоскости проведем окружности с общим центром в начале координат и с радиусами 1, 2, 3,

Эти окружности разбивают λ -плоскость на счетное множество областей.

Как мы уже видели, в круге любого радиуса n содержится только конечное число характеристических чисел. Но тогда в каждом кольце $n < |\lambda| \leq n+1$ их, очевидно, тоже содержится конечное число; множество всех характеристических чисел представляет собой сумму счетного множества конечных множеств, а такая сумма, как известно, либо счетная, либо конечная.

Точка сгущения характеристических чисел не может находиться на конечном расстоянии от начала — в противном случае нашелся бы круг на плоскости λ , который содержал бы бесконечное множество характеристических чисел.

Теорема 2. *Если значение λ правильное, то как данное интегральное уравнение, так и сопряженное с ним уравнение, разрешимо при любом свободном члене и решение каждого из этих уравнений единственно. Соответствующие однородные уравнения имеют только тривиальные решения.*

Для данного уравнения теорема 2 была уже сформулирована и доказана в § 10. Чтобы доказать эту теорему для сопряженного уравнения, достаточно напомнить, что сопряженные уравнения сводятся к сопряженным линейным системам. Если значение λ правильное, то определители этих систем оба отличны от нуля; отсюда вытекает, что не только данное, но и сопряженное интегральное уравнение разрешимо и его решение единственно.

Теорема 3. *Если значение λ характеристическое, то однородное интегральное уравнение, так же как и сопряженное с ним однородное уравнение, имеет нетривиальные решения. Число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения конечно и равно числу линейно независимых решений однородного сопряженного уравнения.*

Однородные сопряженные интегральные уравнения сводятся к однородным же сопряженным алгебраическим системам. Значение λ — характеристическое. Поэтому определители указанных систем равны нулю, обе системы имеют нетривиальные решения и число линейно независимых решений одно и то же для обеих систем. Но каждому решению алгебраической системы отвечает решение соответствующего

интегрального уравнения, и наоборот, а линейно независимым решениям алгебраической системы отвечают линейно независимые решения интегрального уравнения. Отсюда и следует, что при λ характеристическом однородные сопряженные интегральные уравнения имеют нетривиальные решения, причем числа линейно независимых решений конечны и совпадают для обоих уравнений.

Теорема 4. *Для того, чтобы неоднородное интегральное уравнение было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член был ортогонален ко всем решениям соответствующего однородного сопряженного интегрального уравнения.*

Таким образом, если данное интегральное уравнение имеет вид

$$\varphi(x) - \lambda K\varphi = f(x), \quad (1)$$

то теорема 4 утверждает, что необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1) является равенство

$$(f, \omega) = 0, \quad (2)$$

где $\omega(x)$ — любое решение уравнения

$$\omega(x) - \bar{\lambda} K^* \omega = 0. \quad (3)$$

Теорема 4 тривиальна, если значение λ правильное: в этом случае $\omega \equiv 0$, так что условие (2) выполняется автоматически; в то же время, в силу теоремы 2, уравнение (1) разрешимо при любом свободном члене.

Пусть λ — характеристическое. Уравнение (1) сведем, по первому способу § 10, к уравнению с вырожденным ядром

$$\psi(x) - \lambda (K'' + \lambda K'' \Gamma_\lambda') \psi = f(x). \quad (4)$$

Пусть ядро этого уравнения имеет вид

$$\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(s).$$

Повторяя рассуждения § 9, мы сведем уравнение (4) к системе

$$C_k - \lambda \sum_{m=1}^n \alpha_{km} C_m = f_k; \quad f_k = \int_a^b f(x) b_k(x) dx; \quad (5)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Для разрешимости системы (5), а с ней и уравнения (1), необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\sum_{k=1}^n f_k \bar{\gamma}_k = 0, \quad (6)$$

где γ_k ; $k = 1, 2, \dots, n$ — любое решение однородной системы

$$\gamma_k - \bar{\lambda} \sum_{m=1}^n \alpha_{mk} \bar{\gamma}_m = 0, \quad (7)$$

сопряженной с системой (5). Остается только показать, что условия (6) и (2) тождественны. Но условие (6) сразу приводится к виду

$$\int_a^b f(x) \sum_{k=1}^n \bar{\gamma}_k \bar{b}_k(x) dx = \left(f, \sum_{k=1}^n \gamma_k \bar{b}_k \right) = 0,$$

а функции

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k \bar{b}_k(x),$$

как легко видеть, совпадают с решениями уравнения (3). Действительно, уравнение (3) имеет вид

$$\omega(x) - \bar{\lambda} \sum_{m=1}^n \bar{b}_m(x) \int_a^b \overline{a_m(s)} \omega(s) ds = 0.$$

Обозначим

$$\int_a^b \overline{a_m(s)} \omega(s) ds = \gamma_m,$$

тогда

$$\omega(x) - \bar{\lambda} \sum_{m=1}^n \gamma_m \bar{b}_m(x) = 0.$$

Умножая на $\overline{a_k(x)}$ и интегрируя, приходим к системе (7). Тем самым установлена тождественность условий (6) и (2), а вместе с тем и справедливость теоремы 4.

Из теорем Фредгольма вытекает так называемая *альтернатива Фредгольма*, которой чаще всего пользуются при исследовании интегральных уравнений.

Либо неоднородное уравнение разрешимо, какова бы ни была его правая часть, либо соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения.

Первая часть альтернативы имеет место, если данное значение параметра правильное, вторая — если оно характеристическое.

§ 13. Резольвента

Будем рассматривать общее уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (1)$$

В § 7 было установлено, что если $|\lambda| < \frac{1}{B}$, то существует функция $\Gamma(x, s; \lambda)$ — резольвента уравнения (1), — зная которую, можно сразу построить решение этого уравнения:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds; \quad (2)$$

при упомянутых значениях λ резольвента разлагается в степенной ряд

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s), \quad (3)$$

и является регулярной функцией параметра λ в круге $|\lambda| < \frac{1}{B}$.

В настоящем параграфе будет показано, что аналогичную функцию можно построить для всех правильных значений λ , иначе говоря, что резольвенту можно аналитически продолжить на всю комплексную λ -плоскость за исключением характеристических чисел ядра $K(x, s)$.

Зададим некоторое число $R > 0$ и будем рассматривать уравнение (1) при правильных значениях λ , расположенных в круге $|\lambda| \leq R$.

Как об этом многократно говорилось выше, ядро $K(x, s)$ можно разбить на сумму ядер $K'(x, s)$ и $K''(x, s)$, из которых первое удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b \int_a^b |K'(x, s)|^2 dx ds \leq \frac{1}{4R^2},$$

а второе вырожденное; будем писать его в виде

$$K''(x, s) = \sum_{k=1}^n u_k(x) v_k(s).$$

Путем введения вспомогательной неизвестной

$$\psi(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K'(x, s) \varphi(s) ds$$

уравнение (1) сводится к алгебраической линейной системе (16) § 10; решая ее по формулам Крамера, найдем

$$C_k = \frac{1}{D_R(\lambda)} \sum_{m=1}^n \Delta_{km}(\lambda) f_m, \quad (4)$$

где $\Delta_{km}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента определителя $D_R(\lambda)$, стоящего на пересечении k -го столбца и m -й строки.

Зная коэффициенты C_k , найдем

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k u_k(x)$$

и

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \psi(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda) \psi(s) ds = \\ &= f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k u_k(x) + \\ &\quad + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda) \left[f(s) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k u_k(s) \right] ds. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение (5) преобразуем, заменив коэффициенты C_k их значениями (4), а числа f_m — по формуле (6) § 9, в которой следует заменить $b_m(s, \lambda)$ на

$$\tilde{v}_m(s, \lambda) = v_m(s) + \lambda \int_a^b \Gamma'(t, s; \lambda) v_m(t) dt,$$

так что

$$f_m = \int_a^b f(s) \tilde{v}_m(s, \lambda) ds = \\ = \int_a^b f(s) \left\{ v_m(s) + \lambda \int_a^b \Gamma'(t, s; \lambda) v_m(t) dt \right\} ds.$$

Все слагаемые, содержащие интегрирование, объединим; там, где это необходимо, изменим обозначения переменных интегрирования так, чтобы везде под знаком интеграла аргумент функции f был обозначен буквой s . Наконец, под знаком интеграла вынесем $f(s)$ за скобку; выражение внутри скобки, которое, очевидно, зависит от x , s и λ , но не зависит от свободного члена $f(s)$, обозначим через $\Gamma(x, s; \lambda)$ и назовем резольвентой ядра $K(x, s)$ при значении параметра λ . Теперь формула (5) приводится к следующей

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds,$$

по форме совпадающей с формулой (2).

Только что описанные преобразования нетрудно выполнить фактически, и они приводят к представлению резольвенты, годному в круге $|\lambda| \leq R$:

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \Gamma'(x, s; \lambda) + \\ + \frac{1}{D_R(\lambda)} \sum_{k, m=1}^n \Delta_{km}(\lambda) \tilde{u}_k(x, \lambda) \tilde{v}_m(s, \lambda), \quad (6)$$

где

$$\tilde{u}_k(x, \lambda) = u_k(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) u_k(t) dt. \quad (7)$$

Из формул (6) и (7) легко усмотреть, что при любом правильном λ резольвента квадратично суммируема в основном квадрате.

Докажем теперь, что резольвента единственна, если она существует. Точнее говоря, докажем следующее предложение: пусть λ — правильное значение параметра, и пусть существуют две функции $\Gamma_1(x, s; \lambda)$ и $\Gamma_2(x, s; \lambda)$,

квадратично суммируемые в основном квадрате и такие, что при любом свободном члене $f(x)$ решение уравнения (1) представимо каждой из формул

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma_1(x, s; \lambda) f(s) ds \quad (8)$$

и

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma_2(x, s; \lambda) f(s) ds. \quad (9)$$

Тогда при данном λ необходимо $\Gamma_1(x, s; \lambda) \equiv \Gamma_2(x, s; \lambda)$.

Для доказательства вычтем равенство (9) из равенства (8). Это приведет нас к тождеству

$$\int_a^b [\Gamma_1(x, s; \lambda) - \Gamma_2(x, s; \lambda)] f(s) ds \equiv 0,$$

верному для любой квадратично суммируемой функции $f(s)$. Разность $\Gamma_1(x, s; \lambda) - \Gamma_2(x, s; \lambda)$ двух квадратично суммируемых функций сама квадратично суммируема в основном квадрате; по теореме Фубини эта разность квадратично суммируема по s в основном промежутке (a, b) при почти всех x . Произвольно зафиксируем такое x и возьмем

$$f(s) = \overline{\Gamma_1(x, s; \lambda)} - \overline{\Gamma_2(x, s; \lambda)}.$$

Тогда последнее тождество дает

$$\int_a^b |\Gamma_1(x, s; \lambda) - \Gamma_2(x, s; \lambda)|^2 ds = 0,$$

откуда и следует наше утверждение. *

Отметим следующие свойства резольвенты.

1. Резольвента мероморфна на всей λ -плоскости. Для доказательства заметим, что определитель $D_R(\lambda)$, алгебраические дополнения $\Delta_{km}(\lambda)$, функции $\tilde{u}_k(x, \lambda)$, $\tilde{v}_m(s, \lambda)$ и резольвента $\Gamma'(x, s; \lambda)$ регулярны в круге $|\lambda| \leq R$, а тогда формула (6) показывает, что в этом круге резольвента регулярна всюду, за исключением разве лишь расположенных в этом круге нулей определителя $D_R(\lambda)$. Таким образом,

в любом круге $|\lambda| \leq R$ резольвента может иметь в качестве особых точек только конечное число полюсов, а это и означает, что резольвента мероморфна на всей плоскости.

2. При малых λ резольвента определяется рядом (3). Это непосредственно следует из доказанной выше единственности резольвенты.

3. Полюсы резольвенты совпадают с характеристическими числами ядра.

В круге $|\lambda| \leq R$ полюсами резольвенты могут быть только нули определителя $D_R(\lambda)$, которые суть характеристические числа интегрального уравнения. Докажем, что, наоборот, всякое характеристическое число есть полюс резольвенты. Допустим противное. Пусть $\bar{\lambda}_0$ характеристическом числе λ_0 резольвента регулярна. Обозначим через $\omega_0(x)$ какое-либо нетривиальное решение однородного сопряженного уравнения

$$\omega(x) - \bar{\lambda}_0 K^* \omega = 0.$$

В силу теоремы 4 Фредгольма уравнение

$$\varphi(x) - \lambda_0 K \varphi = \omega_0(x) \quad (10)$$

неразрешимо. Пусть теперь λ — правильная точка, близкая к λ_0 . Уравнение

$$\varphi(x) - \lambda K \varphi = \omega_0(x) \quad (11)$$

имеет решение, которое получается из общей формулы (2), если в ней заменить $f(x)$ на $\omega_0(x)$

$$\varphi(x) = \omega_0(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \omega_0(s) ds.$$

Подставив это в уравнение (11), получим тождество, которое после элементарных упрощений принимает следующий вид:

$$\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \omega_0(s) ds - \int_a^b K(x, s) \left\{ \omega_0(s) + \right. \\ \left. + \lambda \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda) \omega_0(t) dt \right\} ds \equiv 0.$$

Для краткости обозначим левую часть последнего тождества через $u(x, \lambda)$, так что это тождество принимает вид

$$u(x, \lambda) \equiv 0.$$

Умножив это скалярно на произвольную квадратично суммируемую функцию $g(x)$, имеем

$$\begin{aligned} 0 = (u(x, \lambda), g(x)) &= \int_a^b \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \omega_0(s) \overline{g(x)} dx ds - \\ &- \int_a^b \int_a^b K(x, s) \omega_0(s) \overline{g(x)} dx ds + \\ &+ \lambda \int_a^b \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda) \omega_0(t) \overline{h(s)} ds dt, \end{aligned} \quad (12)$$

где функция

$$h(s) = \int_a^b \overline{K(x, s)} g(x) dx$$

квадратично суммируема.

По предположению резольвента $\Gamma(x, s; \lambda)$ регулярна в точке λ_0 . В силу определения, данного в конце § 7, это означает, что правая часть тождества (12) есть функция от λ , аналитическая в точке λ_0 . В таком случае в этом тождестве можно перейти к пределу при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, что дает

$$(u(x, \lambda_0), g(x)) = 0.$$

Полагая здесь $g(x) = \overline{u(x, \lambda_0)}$, получим $\|u(x, \lambda_0)\|^2 = 0$. Отсюда $u(x, \lambda_0) \equiv 0$, или

$$\begin{aligned} \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda_0) \omega_0(s) ds - \int_a^b K(x, s) \left\{ \omega_0(s) + \right. \\ \left. + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda_0) \omega_0(t) dt \right\} ds \equiv 0, \quad a \leq x \leq b. \end{aligned}$$

Последнее тождество показывает, что уравнение (10) имеет решение, равное

$$\omega_0(x) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda_0) \omega_0(s) ds.$$

Полученное противоречие показывает справедливость нашего утверждения.

Замечание. Как и всякая мероморфная функция, резольвента может быть представлена в виде отношения двух целых функций. Можно доказать, что

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)},$$

где функции $D(x, s; \lambda)$ и $D(\lambda)$ суть целые функции от λ , которые выражаются так называемыми рядами Фредгольма

$$D(x, s; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, s) \lambda^n,$$

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n.$$

Здесь

$$C_0 = 1, \quad B_0(x, s) = K(x, s),$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(x, x) dx, \quad n \geq 0;$$

$$B_n(x, s) = \int_a^b \dots \int_a^b \Delta_n(x, s, t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n, n \geq 0;$$

$$\Delta_n(x, s, t_1, \dots, t_n) = \begin{vmatrix} K(x, s), & K(x, t_1), & \dots, & K(x, t_n) \\ K(t_1, s), & K(t_1, t_1), & \dots, & K(t_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n, s), & K(t_n, t_1), & \dots, & K(t_n, t_n) \end{vmatrix}.$$

Можно доказать также, что корни „знаменателя Фредгольма“ $D(\lambda)$ совпадают с характеристическими числами ядра $K(x, s)$.

Ряд (3) для резольвенты есть ряд Тейлора аналитической функции $\Gamma(x, s; \lambda)$ в окрестности точки $\lambda=0$. Из общих теорем теории функций комплексной переменной известно, что радиус сходимости ряда Тейлора равен

расстоянию от центра круга до ближайшей особой точки разлагаемой функции. Но особые точки резольвенты суть характеристические числа данного ядра. Поэтому, если λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число, то ряд (3) сходится в круге $|\lambda| < |\lambda_1|$. В том же круге, очевидно, сходятся и последовательные приближения для уравнения (1).

Следствие: Если в некотором круге $|\lambda| < R$ нет характеристических чисел уравнения (1), то в этом круге последовательные приближения сходятся. Очевидно также, что в круге радиуса, большего чем $|\lambda_1|$, последовательные приближения сходятся не могут.

§ 14. Случай многих независимых переменных

В приложениях часто приходится решать интегральные уравнения, в которых неизвестная функция зависит от нескольких независимых переменных. Теория Фредгольма с естественными изменениями распространяется и на такие уравнения.

Пусть дано уравнение

$$\varphi(P) - \lambda \int \dots \int_D K(P, Q) \varphi(Q) dV_Q = f(P), \quad (1)$$

в котором D — конечная или бесконечная область (не обязательно связная) m -мерного пространства; P и Q — точки области D , dV_Q — элемент объема в указанном пространстве; значок Q внизу указывает, что интегрирование совершается по переменной точке Q , тогда как точка P остается при этом интегрировании неподвижной. Далее, $\varphi(P)$ означает неизвестную, а $f(P)$ — данную функцию, λ — данный численный параметр. Для краткости будем интегрирование по области D обозначать одним знаком интеграла, в соответствии с чем будем записывать уравнение (1) в виде

$$\varphi(P) - \lambda \int_D K(P, Q) \varphi(Q) dV_Q = f(P). \quad (1a)$$

Уравнение (1) назовем уравнением Фредгольма, если

$$\int_D \int_D |K(P, Q)|^2 dV_P dV_Q = B^2 < \infty. \quad (B)$$

Условие (A) для случая многих переменных принимает такой вид

$$\int_D |K(P, Q)|^2 dV_Q \leq A = \text{const.} \quad (\text{A})$$

Сопряженное ядро определим равенством

$$K^*(P, Q) = \overline{K(Q, P)}.$$

Для уравнения (1), ядро которого удовлетворяет перечисленным выше условиям, справедливо все сказанное в предшествующих параграфах. Так, это уравнение разрешимо по методу последовательных приближений, если $|\lambda| < \frac{1}{B}$, и решение в этом случае единственно. Уравнение с вырожденным ядром, т. е. с ядром вида

$$K(P, Q) = \sum_{k=1}^n a_k(P) b_k(Q)$$

сводится к алгебраической линейной системе; путем разбиения ядра на вырожденное и малое можно общее уравнение Фредгольма свести к уравнению с вырожденным ядром и таким путем установить справедливость четырех теорем Фредгольма. Доказательства всех этих утверждений получаются простой перефразировкой доказательств, приведенных в предшествующих параграфах, и мы предоставляем это сделать читателю.

Часто приходится иметь дело с интегральными уравнениями вида

$$\varphi(P) - \lambda \int_S K(P, Q) \varphi(Q) dS_Q = f(P), \quad (2)$$

где S — некоторая поверхность, dS_Q — элемент ее площади. Уравнение (2) просто сводится к виду (1). Для этого достаточно ввести параметрические уравнения поверхности S и затем в качестве независимых переменных и переменных интегрирования ввести параметры, определяющие положения точек P и Q .

§ 15. Уравнения со слабой особенностью

Будем рассматривать сразу случай многих независимых переменных, изменяющихся в некоторой *конечной* области D m -мерного пространства, и в соответствии с этим писать интегральное уравнение в виде

$$\varphi(P) - \lambda \int_D K(P, Q) \varphi(Q) dV_Q = f(P). \quad (1)$$

Обозначим через r расстояние между точками P и Q . Ядро $K(P, Q)$ назовем *ядром со слабой особенностью*, если существует такая постоянная α , $0 \leq \alpha < m$, что произведение $r^\alpha K(P, Q)$ ограничено. Ядро со слабой особенностью можно, следовательно, представить в виде

$$K(P, Q) = \frac{A(P, Q)}{r^\alpha}; \quad 0 \leq \alpha < m, \quad (2)$$

где $A(P, Q)$ ограниченная функция. Если $K(P, Q)$ — ядро со слабой особенностью, то мы будем называть уравнение (1) и входящий в него интегральный оператор соответственно *уравнением и оператором со слабой особенностью*.

Если $\alpha < \frac{m}{2}$, то оператор со слабой особенностью есть в то же время и оператор Фредгольма, ядро которого удовлетворяет условию (A).

Действительно, пусть $|A(P, Q)| \leq C = \text{const}$, тогда

$$\int_D |K(P, Q)|^2 dV_Q \leq C^2 \int_D \frac{dV_Q}{r^{2\alpha}}.$$

Введем сферические координаты с центром в точке P . Тогда, как известно, $dV_Q = r^{m-1} dr dS$, где dS — элемент площади поверхности гиперболы радиуса единица. Обозначим эту гиперболу через S , а площадь ее поверхности через $|S|$ ¹⁾. Наконец, через h обозначим диаметр области D . Тогда при любом положении точки P область D лежит внутри гиперболы радиуса h с центром в точке P . Отсюда

$$\int_D \frac{dV_Q}{r^{2\alpha}} \leq \int_{r < h} \frac{dV_Q}{r^{2\alpha}} = \int_S dS \int_0^h r^{m-1-2\alpha} dr = \frac{|S| h^{m-2\alpha}}{m-2\alpha}.$$

1) Напомним, что $|S| = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$.

и

$$\int_D |K(P, Q)|^2 dV_Q \leq A; \quad A = \frac{C^2 |S| h^{m-2\alpha}}{m-2\alpha}.$$

Итак, ядро $K(P, Q)$ удовлетворяет условию (A); раз область D конечная, то это ядро также и квадратично суммируемо. По определению, оператор

$$\int_D K(P, Q) \varphi(Q) dV_Q$$

есть оператор Фредгольма.

Теорема 1. Пусть $K(P, Q)$ ядро со слабой особенностью. Интеграл

$$\psi(P) = \int_D K(P, Q) \varphi(Q) dV_Q$$

существует при почти всех $P \in D$, если функция $\varphi(P)$ квадратично суммируема в D , и представляет собой функцию, также квадратично суммируемую в D .

Доказательство разобьем на четыре части.

№ 1. Интеграл

$$\int_D \frac{dV_P}{r^\alpha}$$

ограничен при любом положении точки Q внутри или на границе области D . Действительно, обозначим, как и выше, через h диаметр области D , тогда, повторяя предшествующие рассуждения, найдем

$$\int_D \frac{dV_P}{r^\alpha} \leq \frac{|S| h^{m-\alpha}}{m-\alpha}.$$

№ 2. Очевидно, существует „двойной“ интеграл

$$\begin{aligned} \int_D \int_D \frac{|\varphi(Q)|^2}{r^\alpha} dV_P dV_Q &= \\ &= \int_D |\varphi(Q)|^2 dV_Q \int_D \frac{dV_P}{r^\alpha} \leq \frac{|S| h^{m-\alpha}}{m-\alpha} \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

По теореме Фубини почти всюду в D существует и суммируема в D функция точки P , задаваемая интегралом

$$\int_D \frac{|\varphi(Q)|^2}{r^\alpha} dV_Q.$$

п°3. Функция $K(P, Q)\varphi(Q)$ суммируема почти при всех $P \in D$. Действительно, если $|A(P, Q)| \leq C$, то

$$|K(P, Q)\varphi(Q)| \leq C \frac{|\varphi(Q)|}{r^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{r^{\alpha/2}} \leq \frac{C}{2} \left\{ \frac{|\varphi(Q)|^2}{r^\alpha} + \frac{1}{r^\alpha} \right\}.$$

По доказанному в п°1 и п°2 первое слагаемое справа суммируемо при почти всех $P \in D$, второе — при всех $P \in D$ а тогда произведение $K(P, Q)\varphi(Q)$ суммируемо при почти всех $P \in D$. Тем самым доказано, что функция $\psi(P)$ определена почти всюду в области D .

п°4. Функция $\psi(P)$ квадратично суммируема в D . Действительно,

$$\begin{aligned} |\psi(P)|^2 &\leq C^2 \left\{ \int_D \frac{|\varphi(Q)|}{r^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{r^{\alpha/2}} dV_Q \right\}^2 \leq \\ &\leq \frac{C^2 |S| h^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int_D \frac{|\varphi(Q)|^2}{r^\alpha} dV_Q. \end{aligned}$$

По доказанному в п°2 правая часть последнего неравенства, а с ней и функция $|\psi(P)|^2$, суммируемы в D ; при этом

$$\|\psi\| = \left\{ \int_D |\psi(P)|^2 dV_P \right\}^{1/2} \leq \frac{C |S| h^{m-\alpha}}{m-\alpha} \|\varphi\|. \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть

$$|K(P, Q)| \leq \frac{C_1}{r^\alpha}, \quad |L(P, Q)| \leq \frac{C_2}{r^\beta},$$

где C_1 и C_2 — постоянные и $0 \leq \alpha < m$, $0 \leq \beta < m$. Тогда ядро

$$M(P, Q) = \int_D K(P, R) L(R, Q) dV_R \quad (4)$$

имеет оценку

$$|M(P, Q)| \leq \begin{cases} c, & \alpha + \beta < m, \\ c |\ln r| + c_1, & \alpha + \beta = m, \\ \frac{c}{r^{\alpha+\beta-m}}, & \alpha + \beta > m, \end{cases} \quad (5)$$

где c и c_1 — некоторые постоянные.

Заметим, что $M(P, Q)$ есть ядро произведения операторов, ядра которых суть $K(P, Q)$ и $L(P, Q)$.

Приступим к доказательству теоремы. Обозначим через h диаметр области D , через r_0 и r_1 — расстояния между точками P, R и Q, R соответственно. Тогда

$$|M(P, Q)| \leq C_1 C_2 \int_D \frac{dV_R}{r_0^\alpha r_1^\beta} \leq C_1 C_2 \int_{r_0 < h} \frac{dV_R}{r_0^\alpha r_1^\beta}. \quad (6)$$

Поместим начало координат в точке P и проведем ось x_1 через точку Q так, чтобы направление от P к Q было положительным. Тогда точки P и Q имеют координаты $(0, 0, \dots, 0)$ и $(r, 0, \dots, 0)$. Координаты точки R обозначим через x_1, x_2, \dots, x_m .

В этих обозначениях имеем

$$r_0^2 = \sum_{k=1}^m x_k^2, \quad r_1^2 = (x_1 - r)^2 + \sum_{k=2}^m x_k^2.$$

В интеграле (6) сделаем подстановку $x_k = r y_k$; $k = 1, 2, \dots, m$.

Полагая $\rho^2 = \sum_{k=1}^m y_k^2$, имеем

$$|M(P, Q)| \leq \frac{C_1 C_2}{r^{\alpha+\beta-m}} \int_{\rho < \frac{h}{r}} \frac{dy_1 dy_2 \dots dy_m}{\rho^\alpha (\rho^2 - 2y_1 + 1)^{\beta/2}}. \quad (7)$$

Оценим интеграл (7). Прежде всего

$$dy_1 dy_2, \dots, dy_m = \rho^{m-1} d\rho dS.$$

Далее, $\rho^2 - 2y_1 + 1 \geq (\rho - 1)^2$. Нетрудно видеть, что при $\rho > 2$ справедливо неравенство $(\rho - 1)^2 > \frac{1}{4} \rho^2$.

Действительно,

$$(\rho - 1)^2 - \frac{1}{4} \rho^2 = \frac{1}{4} (3\rho - 2)(\rho - 2),$$

что положительно при $\rho > 2$. Отсюда

$$|M(P, Q)| \leq \frac{C_1 C_2}{r^{\alpha+\beta-m}} \left[\int_{\rho \leq 2} \frac{\rho^{m-1-\alpha} d\rho dS}{(\rho^2 - 2y_1 + 1)^{\beta/2}} + \right. \\ \left. + 2^\beta \int_{2 < \rho < \frac{h}{r}} \rho^{m-1-\alpha-\beta} d\rho dS \right].$$

Заметим, что первый интеграл справа есть величина постоянная, которую мы обозначим через a . Если $\alpha + \beta < m$, то, вычисляя второй интеграл справа, получаем

$$|M(P, Q)| \leq C_1 C_2 |S| \left[ar^{m-\alpha-\beta} + \frac{2^\beta h^{m-\alpha-\beta}}{m-\alpha-\beta} \right] \leq \\ \leq C_1 C_2 h^{m-\alpha-\beta} |S| \left(a + \frac{2^\beta}{m-\alpha-\beta} \right).$$

Если $\alpha + \beta = m$, то

$$|M(P, Q)| \leq C_1 C_2 |S| \left(a + 2^\beta \ln \frac{h}{2r} \right).$$

Наконец, если $\alpha + \beta > m$, то

$$|M(P, Q)| \leq \frac{C_1 C_2 |S|}{r^{\alpha+\beta-m}} \left(a + 2^\beta \int_2^{h/r} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+\beta+1-m}} \right) < \\ < \frac{C_1 C_2 |S|}{r^{\alpha+\beta-m}} \left(a + 2^\beta \int_2^\infty \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+\beta+1-m}} \right) = \frac{C_1 C_2 |S|}{r^{\alpha+\beta-m}} \left(a + \frac{2^{m-\alpha}}{\alpha+\beta-m} \right).$$

Таким образом, оценка (5) установлена во всех случаях.

Следствие. Если ядро имеет слабую особенность, то все его итерированные ядра, начиная с некоторого, ограничены.

Действительно, если ядро $K(P, Q)$ имеет вид (2), то, как это следует из только что доказанной теоремы, n -ое

итерированное ядро имеет оценку

$$|K_n(P, Q)| \leq \begin{cases} \frac{C_n}{r^{n\alpha - (n-1)m}}, & n\alpha - (n-1)m > 0, \\ C_n, & n\alpha - (n-1)m < 0, \end{cases}$$

где C_n некоторая постоянная. Таким образом $K_n(P, Q)$ ограничено, если

$$n > \frac{m}{m-\alpha}. \quad (8)$$

З а м е ч а н и е. Для последующих приложений достаточно было бы предполагать, что $n > \frac{m}{2(m-\alpha)}$. Тогда $n\alpha - (n-1)m < \frac{m}{2}$ и ядро $K_n(P, Q)$ удовлетворяет условию (А).

Обратимся к уравнению (1), которое будем также записывать короче следующим образом. Прежде всего интегральный оператор в этом уравнении будем обозначать через $K\varphi$. Далее, введем в рассмотрение *тождественный* оператор I , определяемый соотношением $I\varphi \equiv \varphi(P)$. Теперь уравнение (1) запишется так:

$$(I - \lambda K)\varphi = f(P). \quad (9)$$

Выражение $I - \lambda K$ можно рассматривать как многочлен первой степени относительно K . Можно составлять относительно K многочлены более высокой степени; такие многочлены можно складывать и умножать по обычным правилам сложения и умножения многочленов, если при этом обращаться с I как с единицей.

Введем в рассмотрение целое число n , такое, что $n > \frac{m}{m-\alpha}$, и число $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$; к обеим частям уравнения (9) применим оператор

$$\begin{aligned} (I - \varepsilon \lambda K)(I - \varepsilon^2 \lambda K) \dots (I - \varepsilon^{n-1} \lambda K) = \\ = I + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \dots + \lambda^{n-1} K^{n-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Мы получим тогда уравнение

$$(I - \lambda^n K^n)\varphi = f(P) + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f + \dots + \lambda^{n-1} K^{n-1} f,$$

или, обозначая правую часть через $F(P)$

$$\varphi(P) - \lambda^n \int_D K_n(P, Q) \varphi(Q) dV_Q = F(P). \quad (11)$$

Мы преобразовали тем самым уравнение (1) в уравнение (11) с n -ым итерированным ядром; в силу условия (8) ядро уравнения (11) ограничено и, так как область D конечна, то это уравнение фредгольмовское. Очевидно, всякое решение уравнения (1) удовлетворяет также уравнению (11); обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Перейдем к доказательству теорем Фредгольма для уравнения (1). Для уравнений со слабой особенностью введем некоторые понятия, аналогичные тем, которые были введены в свое время для уравнений Фредгольма. Значение λ_0 называется правильным для данного ядра $K(P, Q)$, если однородное уравнение

$$(I - \lambda_0 K) \varphi = 0 \quad (12)$$

имеет только тривиальное решение, и характеристическим, если это однородное уравнение имеет нетривиальные решения. Такие решения мы будем называть собственными функциями ядра $K(P, Q)$, отвечающими характеристическому числу λ_0 . Заметим еще, что определение и свойства сопряженного ядра распространяются и на ядра со слабой особенностью.

Теорема 1. *Ядро со слабой особенностью имеет не более чем счетное множество характеристических чисел, с единственной возможной точкой сгущения на бесконечности.*

Сформулированная теорема равносильна утверждению, что в любой конечной части комплексной λ -плоскости имеется не более конечного числа характеристических чисел.

Доказательство. Применив к обеим частям уравнения (12) оператор (10), в котором положено $\lambda = \lambda_0$, мы придем к однородному уравнению Фредгольма

$$(I - \lambda_0^n K^n) \varphi = 0. \quad (13)$$

Ему удовлетворяет каждое решение уравнения (12), поэтому, если λ_0 есть характеристическое число уравнения (12), то λ_0^n есть характеристическое число уравнения (13).

Рассмотрим круг $|\lambda| \leq R$, где R произвольно зафиксированное число. По теореме 1 Фредгольма ядро $K_n(P, Q)$

имеет в круге радиуса R^n с центром в начале только конечное число характеристических чисел, а тогда в круге радиуса R с центром в начале уравнение (12) также имеет только конечное число характеристических чисел. Этим для ядра со слабой особенностью доказана теорема 1 Фредгольма.

Мы уже говорили, что всякое решение уравнения (1) удовлетворяет уравнению (11). Докажем, что можно выбрать число n так, чтобы оно удовлетворяло неравенству (8) и чтобы всякое решение уравнения (11) удовлетворяло уравнению (1), так что эти уравнения будут равносильными. Покажем, прежде всего, что число n можно выбрать так, чтобы оно удовлетворяло неравенству (8) и чтобы ни одно из чисел

$\varepsilon\lambda, \varepsilon^2\lambda, \dots, \varepsilon^{n-1}\lambda$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, не было характеристическим.

Допустим, что это невозможно. Обозначим через p_1, p_2, p_3, \dots простые числа, большие, чем $\frac{m}{m-a}$, и пусть $\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi i}{p_j}}$. В силу нашего допущения, для любого j найдется такой показатель k_j , $1 \leq k_j < p_j$, что число $\varepsilon_j^{k_j}\lambda$ будет при данном λ характеристическим для ядра $K(P, Q)$. Так как числа p_j простые, то среди чисел

$$\varepsilon_j^{k_j} = e^{\frac{2\pi i k_j}{p_j}}$$

нет равных. Но тогда на окружности с центром в начале и радиусом λ у ядра $K(P, Q)$ окажется бесконечно много

характеристических чисел $\varepsilon_j^{k_j}\lambda = e^{\frac{2\pi i k_j}{p_j}}\lambda$, что противоречит

теореме 1 Фредгольма. Поэтому существует такое простое число $p_j > \frac{m}{m-a}$, что соответствующие ему числа $\varepsilon_j\lambda$,

$\varepsilon_j^2\lambda, \dots, \varepsilon_j^{p_j-1}\lambda$ все правильные. Примем $n = p_j$.

Уравнение (11) можно записать в следующей форме:

$$(I - \varepsilon\lambda K)(I - \varepsilon^2\lambda K) \dots (I - \varepsilon^{n-1}\lambda K)(I - \lambda K)\varphi = \\ = (I - \varepsilon\lambda K)(I - \varepsilon^2\lambda K) \dots (I - \varepsilon^{n-1}\lambda K)f.$$

Переносим свободный член налево, получим

$$\prod_{j=1}^{n-1} (I - \varepsilon^j \lambda K) [(I - \lambda K) \varphi - f] = 0.$$

Положив $(I - \lambda K) \varphi - f = \omega$, приведем последнее уравнение к виду

$$\prod_{j=1}^{n-1} (I - \varepsilon^j \lambda K) \omega = 0. \quad (14)$$

Обозначая далее

$$\omega_1 = \prod_{j=2}^{n-1} (I - \varepsilon^j \lambda K) \omega,$$

представим уравнение (14) в виде

$$(I - \varepsilon \lambda K) \omega_1 = 0.$$

Так как $\varepsilon \lambda$ правильное число для ядра $K(P, Q)$, то $\omega_1 \equiv 0$, т. е.

$$\prod_{j=2}^{n-1} (I - \varepsilon^j \lambda K) \omega = 0.$$

Полагая

$$\prod_{j=3}^{n-1} (I - \varepsilon^j \lambda K) \omega = \omega_2$$

и пользуясь тем, что значение $\varepsilon^2 \lambda$ правильное, найдем, что $\omega_2 \equiv 0$. Продолжая этот процесс, мы в конечном счете найдем, что $\omega \equiv 0$, то есть, что

$$(I - \lambda K) \varphi \equiv f.$$

Таким образом, всякое решение уравнения (11) удовлетворяет уравнению (9). Это значит, что указанные уравнения эквивалентны. Полагая теперь $f(P) \equiv 0$, найдем, что уравнения (12) и (13) эквивалентны и, в частности, имеют одно и то же число линейно независимых решений.

Докажем теперь, что для уравнений со слабой особенностью верна третья теорема Фредгольма.

Напишем сопряженные с (12) и (13) уравнения

$$(I - \bar{\lambda}_0 K^*) \psi = 0, \quad (15)$$

$$(I - \bar{\lambda}_0^n K^{*n}) \omega = 0. \quad (16)$$

Уравнение (13) типа Фредгольма и число его линейно независимых решений конечно. Обозначим это число через r . Тогда уравнение (16) имеет тоже r решений. Обозначим через r^* число линейно независимых решений уравнения (15). Всякое решение уравнения (15) удовлетворяет также и уравнению (16), поэтому

$$r^* \leq r.$$

Если теперь рассматривать уравнение (15) как исходное, а уравнение (12) как ему сопряженное, то точно так же мы придем к выводу, что

$$r \leq r^*.$$

Окончательно получаем

$$r = r^*,$$

т. е. сопряженные уравнения (12) и (15) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Теорема 3 Фредгольма доказана.

Перейдем к доказательству *четвертой* теоремы Фредгольма. Докажем сперва необходимость условия теоремы. Пусть уравнение (1) разрешимо и пусть $\varphi(P)$ какое-либо его решение. Рассмотрим однородное сопряженное уравнение (15) и пусть $\psi(P)$ какое-либо решение этого нового уравнения. Покажем, что $(f, \psi) = 0$. Действительно,

$$(f, \psi) = (\varphi - \lambda K\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) - \lambda (K\varphi, \psi).$$

Но в силу соотношения (C) (см. § 11)

$$\lambda (K\varphi, \psi) = \lambda (\varphi, K^*\psi) = (\varphi, \bar{\lambda}K^*\psi)$$

и, следовательно,

$$(f, \psi) = (\varphi, \psi) - (\varphi, \bar{\lambda}K^*\psi) = (\varphi, \psi - \bar{\lambda}K^*\psi) = 0.$$

Теперь докажем достаточность условия теоремы 4. Выше было показано, что можно выбрать такое целое число n , чтобы ядро $K_n(P, Q)$ было ограничено и чтобы уравнение (11) было равносильно исходному. В силу этого для разрешимости уравнений (1) и (11) будут достаточными одни и те же условия. Но для разрешимости уравнения (11) по четвертой теореме Фредгольма достаточным является условие

$$(F, \omega) = 0,$$

где ω — любое решение сопряженного с (11) однородного уравнения (16), в котором следует заменить λ_0 на λ , а $F(P)$ имеет следующее значение:

$$F(P) = f + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f + \dots + \lambda^{n-1} K^{n-1} f = \prod_{j=1}^{n-1} (I - \epsilon^j \lambda K) f.$$

Уравнение (16) может быть переписано в виде

$$(I - \bar{\lambda}^n K^{*n}) \omega = \prod_{j=0}^{n-1} (I - \bar{\epsilon}^j \bar{\lambda} K^*) \omega = 0.$$

Выделим множитель, соответствующий индексу $j=0$. Тогда последнее уравнение запишется так:

$$(I - \bar{\lambda} K^*) \prod_{j=1}^{n-1} (I - \bar{\epsilon}^j \bar{\lambda} K^*) \omega = 0.$$

Если мы обозначим

$$\prod_{j=1}^{n-1} (I - \bar{\epsilon}^j \bar{\lambda} K^*) \omega = \psi, \quad (17)$$

то получим, что

$$(I - \bar{\lambda} K^*) \psi = 0.$$

Отсюда видно, что ψ есть решение однородного сопряженного с (1) уравнения.

Преобразуем теперь условие $(F, \omega) = 0$, являющееся, как мы выяснили, достаточным для разрешимости уравнения (1). Пользуясь опять соотношением (C), получаем:

$$(F, \omega) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} (I - \epsilon^j \lambda K) f, \omega \right) = \left(f, \prod_{j=1}^{n-1} (I - \bar{\epsilon}^j \bar{\lambda} K^*) \omega \right) = (f, \psi)$$

и достаточное условие разрешимости уравнения (1) принимает вид

$$(f, \psi) = 0.$$

Как мы видим, это условие состоит в том, что свободный член f должен быть ортогонален к тем решениям однородного сопряженного уравнения, которые могут быть представлены в виде (17). Но тогда, тем более, будет достаточным требование ортогональности свободного члена ко всем решениям сопряженного однородного уравнения. Этим теорема 4 Фредгольма доказана полностью.

Нетрудно видеть, что выражение (17) исчерпывает все решения однородного сопряженного уравнения — в противном случае мы пришли бы к противоречию с необходимым условием разрешимости уравнения (1).

Вторая теорема Фредгольма утверждает, что если значение λ правильное, то как уравнение (1), так и сопряженное с ним уравнение, разрешимы при любом свободном члене и решение каждого из них единственно. Покажем, что это имеет место и в случае уравнения со слабой особенностью.

Докажем разрешимость уравнения (1) при правильном λ . В этом случае уравнение (15) имеет единственное решение $\psi \equiv 0$. Тогда необходимое и достаточное условие существования решения выполняется тождественно, так как $(f, \psi) = (f, 0) = 0$ при любой функции $f(P)$. Единственность решения следует непосредственно из условия, что λ — правильное. Точно так же доказывается существование и единственность решения сопряженного уравнения.

§ 16. О непрерывности решений интегрального уравнения

В приложениях интегральных уравнений Фредгольма особый интерес представляют непрерывные решения. Поэтому желательно выяснить те условия, при которых решение интегрального уравнения будет не только квадратично суммируемым, но и непрерывным.

Интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (1)$$

будем рассматривать в предположении, что основной промежуток (a, b) конечен, а ядро не только квадратично суммируемо, но и удовлетворяет условию (A):

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds \leq A. \quad (A)$$

Теорема 1. *Если свободный член интегрального уравнения (1) ограничен, а само уравнение разрешимо, то любое его решение ограничено.*

Если $f(x)$ ограниченная функция, то она тем более квадратично суммируема. Напомним, что решение $\varphi(x)$ квадратично суммируемо в силу требования, наложенного нами (см. § 1) на искомые решения уравнения Фредгольма.

Перепишав уравнение (1) следующим образом

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds, \quad (2)$$

мы представим решение уравнения (1) в виде суммы двух слагаемых; первое из них, $f(x)$, ограничено, и достаточно доказать ограниченность интеграла. Но это сразу вытекает из неравенства Буняковского

$$\left| \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds \right| \leq \left\{ \int_a^b |K(x, s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b |\varphi(s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{A} \|\varphi\|.$$

Следствие. Если ядро удовлетворяет условию (A), то его собственные функции ограничены. Действительно, собственные функции это решения интегрального уравнения, в котором $f(x) \equiv 0$, но в таком случае $f(x)$ — ограниченная функция.

Будем говорить, что ядро $K(x, s)$ непрерывно в целом, если оно удовлетворяет следующему условию: по данному $\epsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если $|x_1 - x_2| < \delta$, то

$$\int_a^b |K(x_1, s) - K(x_2, s)| ds < \epsilon.$$

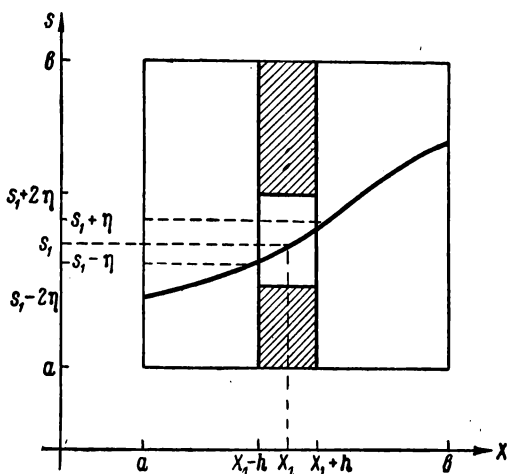
Укажем несколько простых случаев, когда ядро непрерывно в целом.

I. Если ядро непрерывно по совокупности переменных x и s в замкнутом квадрате $a \leq x, s \leq b$, то оно, очевидно, непрерывно в целом.

II. Если ядро, удовлетворяющее условию (A), разрывно в основном квадрате только вдоль конечного числа n линий, представимых уравнениями $s = g_k(x)$; $k = 1, 2, \dots, n$, с не-

прерывными функциями $g_k(x)$, то это ядро непрерывно в целом.

Для простоты ограничимся случаем одной кривой разрыва $s = g(x)$ (черт. 6). Возьмем произвольную точку $x_1 \in [a, b]$ и положим $s_1 = g(x_1)$. Окружим точку x_1 интервалом $x_1 - h < x < x_1 + h$; число h выберем столь малым, чтобы в точках этого интервала было $|g(x) - s_1| < \eta = \frac{\epsilon^2}{64A}$,



Черт. 6

где ϵ — произвольное положительное число. В прямоугольниках

$$x_1 - h \leq x \leq x_1 + h; \quad a \leq s \leq s_1 - 2\eta, \quad s_1 + 2\eta \leq s \leq b \quad (*)$$

(на черт. 6 они заштрихованы) ядро непрерывно.

Пусть $|x_2 - x_1| < h$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b |K(x_1, s) - K(x_2, s)| ds = \\ = \int_a^{s_1 - 2\eta} + \int_{s_1 - 2\eta}^{s_1 + 2\eta} + \int_{s_1 + 2\eta}^b = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Далее,

$$J_2 \leq \int_{s_1-2\eta}^{s_1+2\eta} |K(x_1, s)| ds + \int_{s_1-2\eta}^{s_1+2\eta} |K(x_2, s)| ds.$$

По неравенству Буняковского

$$\begin{aligned} \int_{s_1-2\eta}^{s_1+2\eta} |K(x, s)| ds &\leq 2\sqrt{\eta} \left\{ \int_{s_1-2\eta}^{s_1+2\eta} |K(x, s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2\sqrt{A\eta} = \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда $J_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем теперь число $\delta < h$ так, чтобы при $|x_2 - x_1| < \delta$ подынтегральная функция в J_1 и J_3 была по модулю меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$; это возможно благодаря непрерывности ядра в прямоугольниках (*). Теперь

$$\int_a^b |K(x_1, s) - K(x_2, s)| ds < \varepsilon, \quad |x_2 - x_1| < \delta,$$

что и требовалось доказать.

III. Пусть по-прежнему ядро удовлетворяет условию (A). Непрерывность в целом не нарушается, если, кроме конечного числа линий разрыва, ядро имеет в основном квадрате еще и конечное число изолированных точек разрыва.

Теорема 2. Если свободный член уравнения (1) непрерывен на сегменте $[a, b]$, а ядро непрерывно в целом, то любое решение уравнения (1) непрерывно на сегменте $[a, b]$.

Достаточно доказать непрерывность интеграла в соотношении (2). Обозначим

$$u(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds.$$

Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ ограничена; по теореме 1 настоящего параграфа решение $\varphi(x)$ уравнения (1) также ограничено: $|\varphi(x)| \leq M = \text{const}$. Зададим

теперь число $\varepsilon > 0$ и подберем такое $\delta > 0$, чтобы при $|x_1 - x_2| < \delta$ было

$$\int_a^b |K(x_1, s) - K(x_2, s)| ds < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тогда

$$|u(x_1) - u(x_2)| = \left| \int_a^b [K(x_1, s) - K(x_2, s)] \varphi(s) ds \right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если ядро непрерывно в целом, то его собственные функции непрерывны.

Рассмотрим уравнение со слабой особенностью

$$\varphi(P) - \lambda \int_D K(P, Q) \varphi(Q) dV_Q = f(P); \quad (3)$$

под D будем понимать замкнутую конечную область m -мерного пространства.

Ядро уравнения (3) имеет вид

$$K(P, Q) = \frac{A(P, Q)}{r^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < m,$$

где числитель $A(P, Q)$ ограничен, когда точки P и Q пробегают область D ; пусть

$$|A(P, Q)| \leq C. \quad (4)$$

Напомним введенное в предшествующем параграфе обозначение

$$F(P) = f(P) + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f + \dots + \lambda^{n-1} K^{n-1} f, \quad (5)$$

где, как обычно,

$$K\varphi = \int_D K(P, Q) \varphi(Q) dV_Q.$$

Исследование решений уравнения со слабой особенностью опирается на следующие леммы.

Лемма 1. Если функция $f(P)$ ограничена в D , то и функция $F(P)$ ограничена в D .

Пусть $f(P)$ ограничена

$$|f(P)| \leq C_1.$$

Докажем прежде всего, что функция Kf также ограничена. Действительно,

$$|Kf| = \left| \int_D \frac{A(P, Q)}{r^\alpha} f(Q) dV_Q \right| \leq CC_1 \int_D \frac{dV_Q}{r^\alpha}.$$

Обозначим через h диаметр области D . По неравенству п° 1 § 15

$$|Kf| \leq \frac{CC_1 |S| h^{m-\alpha}}{m-\alpha},$$

и, следовательно, функция Kf ограничена. Теперь нетрудно доказать ограниченность последующих слагаемых в выражении (5). Действительно, $K^2 f = K(Kf)$; так как Kf ограничена, то по только что доказанному и $K^2 f$ ограничена. Так же доказывается ограниченность $K^3 f$ и т. д. до $K^{n-1} f$. Теперь ограниченность функции $F(P)$ очевидна.

Лемма 2. Если функция $f(P)$ ограничена в D , а функция $A(P, Q)$ непрерывна в D , то функция Kf непрерывна в D .

Обозначим $Kf = g(P)$. Имеем

$$g(P_1) - g(P_2) = \int_D [K(P_1, Q) - K(P_2, Q)] f(Q) dV_Q.$$

Обозначим через ω шар с центром в точке P_1 и радиусом η , который будем предполагать достаточно малым; расстояние между точками P_1 и P_2 будем считать меньшим, нежели η . Разбив область D на области ω и $D - \omega$, легко получим

$$\begin{aligned} |g(P_1) - g(P_2)| &\leq C_1 \int_{D-\omega} |K(P_1, Q) - K(P_2, Q)| dV_Q + \\ &\quad + CC_1 \int_{\omega} \frac{dV_Q}{r_1^\alpha} + CC_1 \int_{\omega} \frac{dV_Q}{r_2^\alpha}; \quad (6) \end{aligned}$$

через r_1 и r_2 обозначены расстояния от точки Q до точек P_1 и P_2 соответственно, а через C_1 — верхняя граница $|f(Q)|$.

Оценим каждый из интегралов (6). Имеем.

$$\int_{\omega} \frac{dV_Q}{r_1^\alpha} = \int_{r_1 < \eta} \frac{dV_Q}{r_1^\alpha}.$$

Введя полярные координаты с центром в P_1 , получим

$$\int_{\omega} \frac{dV_Q}{r_1^\alpha} = |S| \int_0^\eta r_1^{m-1-\alpha} dr_1 = \frac{|S| \eta^{m-\alpha}}{m-\alpha}.$$

Далее, $r_2 = |P_2 Q| \leq |P_2 P_1| + |P_1 Q| \leq \eta + r_1$, поэтому

$$\int_{\omega} \frac{dV_Q}{r_2^\alpha} = \int_{r_1 < \eta} \frac{dV_Q}{r_2^\alpha} \leq \int_{r_2 < 2\eta} \frac{dV_Q}{r_2^\alpha} = \frac{|S| (2\eta)^{m-\alpha}}{m-\alpha}.$$

Теперь ясно, что при достаточно малом η сумма второго и третьего слагаемых в (6) будет, независимо от положения точки P_1 , меньше $\varepsilon/2$, где ε — произвольно малое положительное число. Зафиксируем таким образом η и обратимся к первому интегралу в (6). В области $D = \omega$ величина $r_1 \geq \eta > 0$; в силу непрерывности функции $A(P, Q)$ можно выбрать такое $\delta > 0$, чтобы при $|P_1 P_2| < \delta$ было

$$|K(P_1, Q) - K(P_2, Q)| < \frac{\varepsilon}{2C_1|D|},$$

где $|D|$ — объем области D . Тогда первое слагаемое в (6) меньше $\varepsilon/2$, и

$$|g(P_1) - g(P_2)| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. Если свободный член уравнения со слабой особенностью ограничен, то любое решение этого уравнения ограничено.

Возьмем n столь большим, чтобы ядро $K_n(P, Q)$ было ограничено. Решение $\varphi(P)$ уравнения (3) удовлетворяет также уравнению Фредгольма

$$\varphi(P) - \lambda^n \int_D K_n(P, Q) \varphi(Q) dV_Q = F(P). \quad (7)$$

По лемме 1, свободный член уравнения (7) ограничен, а тогда, по теореме 1, ограничено и решение этого уравнения.

Теорема 4. Если свободный член уравнения со слабой особенностью и функция $A(P, Q)$ непрерывны в D , то любое решение этого уравнения непрерывно в D .

Будучи непрерывной в замкнутой области D , функция $f(P)$ в ней ограничена. По теореме 3 решение $\varphi(P)$ уравнения (3) ограничено; по лемме 2 функция $K\varphi$ непрерывна в D . Но тогда и функция $\varphi(P) = f(P) + \lambda K\varphi$ непрерывна в D .

Следствие. Если функция $A(P, Q)$ непрерывна в D , то собственные функции ядра со слабой особенностью

$$K(P, Q) = \frac{A(P, Q)}{r^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < m$$

непрерывны.

§ 17. Системы интегральных уравнений

Система интегральных уравнений Фредгольма второго рода с одной независимой переменной имеет вид

$$\varphi_j(x) - \lambda \sum_{l=1}^n \int_a^b K_{jl}(x, s) \varphi_l(s) ds = f_j(x); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Примем, что ядра $K_{jl}(x, s)$ квадратично суммируемы в основном квадрате, а свободные члены $f_j(x)$ квадратично суммируемы в основном промежутке; от искоемых функций $\varphi_j(x)$ также потребуем, чтобы они были в основном промежутке квадратично суммируемы. На такие системы полностью распространяется теория, развитая в предшествующих параграфах. Так, нетрудно показать, что для системы (1) последовательные приближения сходятся в среднем к решению системы, если λ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad (2)$$

где на этот раз

$$B^2 = \sum_{j,l=1}^n \int_a^b \int_a^b |K_{jl}(x, s)|^2 dx ds. \quad (3)$$

Если ядра $K_{jl}(x, s)$ удовлетворяют еще и условию (A):

$$\int_a^b |K_{jl}(x, s)|^2 ds \leq A_{jl} = \text{const},$$

то последовательные приближения сходятся регулярно.

Если все ядра $K_{jl}(x, s)$ вырожденные, то система (1) сводится к линейной алгебраической системе. В общем случае можно также осуществить такое сведение с помощью разбиения каждого ядра $K_{jl}(x, s)$ на сумму ядер вырожденного и малого; таким путем можно установить, что для системы интегральных уравнений Фредгольма справедливы все четыре теоремы Фредгольма. Для этого необходимо должным образом определить понятие сопряженной системы интегральных уравнений и понятие ортогональности. Сопряженной с системой (1) называется система интегральных уравнений

$$\omega_j(x) - \bar{\lambda} \sum_{l=1}^m \int_a^b \overline{K_{lj}(s, x)} \omega_l(s) ds = g_j(x),$$

где функции $g_j(x)$ произвольны; две системы функций $f_j(x)$ и $g_j(x)$; $j = 1, 2, \dots, n$, или, если угодно, две вектор-функции

$$\begin{aligned} f(x) &= \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}, \\ g(x) &= \{g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)\} \end{aligned}$$

называются ортогональными, если

$$(f, g) = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(x) \overline{g_j(x)} dx = 0;$$

самое число

$$(f, g) = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(x) \overline{g_j(x)} dx$$

называется скалярным произведением вектор-функций $f(x)$ и $g(x)$, а число $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ — нормой вектор-функции $f(x)$. Все сказанное без труда распространяется на случай любого числа независимых переменных.

Мы не станем на этом останавливаться более подробно, так как можно легко обойти все трудности, связанные с построением теории Фредгольма для системы интегральных уравнений вида (1). Именно, *такую систему легко преобразовать в одно интегральное уравнение типа Фредгольма*. Докажем это. Определим функции $\Phi(x)$ и $F(x)$ в промежутке $(a, nb - (n-1)a)$, положив

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \varphi_j(x - (j-1)(b-a)), \\ F(x) &= f_j(x - (j-1)(b-a)),\end{aligned}$$

если

$$(j-1)b - (j-2)a \leq x < jb - (j-1)a.$$

Точно так же зададим ядро $K(x, s)$ в квадрате $a \leq x \leq nb - (n-1)a$; $a \leq s \leq nb - (n-1)a$, положив

$$K(x, s) = K_{jl}(x - (j-1)(b-a), s - (l-1)(b-a)),$$

если

$$\begin{aligned}(j-1)b - (j-2)a &\leq x < jb - (j-1)a, \\ (l-1)b - (l-2)a &\leq s < lb - (l-1)a.\end{aligned}$$

Теперь система (1) записывается в виде одного уравнения Фредгольма

$$\Phi(x) - \lambda \int_a^{nb - (n-1)a} K(x, s) \Phi(s) ds = F(x). \quad (4)$$

Выше было принято, что ядра $K_{jl}(x, s)$ квадратично суммируемы в основном квадрате, а свободные члены $f_j(x)$ — в основном промежутке (a, b) . Нетрудно видеть, что построенное нами ядро $K(x, s)$ квадратично суммируемо в новом квадрате

$$a < x < nb - (n-1)a; \quad a < s < nb - (n-1)a,$$

а свободный член $F(x)$ квадратично суммируем в проме-

жутке $(a, nb - (n-1)a)$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_a^{nb-(n-1)a} \int_a^{nb-(n-1)a} |K(x, s)|^2 dx ds = \\ &= \sum_{j, l=1}^n \int_{(j-1)b-(j-2)a}^{jb-(j-1)a} \int_{(l-1)b-(l-2)a}^{lb-(l-1)a} |K(x, s)|^2 dx ds = \\ &= \sum_{j, l=1}^n \int_a^b \int_a^b |K(x + (j-1)(b-a), s + \\ & \quad + (l-1)(b-a))|^2 dx ds = \\ &= \sum_{j, l=1}^n \int_a^b \int_a^b |K_{jl}(x, s)|^2 dx ds = B^2 < \infty. \end{aligned}$$

Точно так же

$$\int_a^{nb-(n-1)a} |F(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^n \int_a^b |f_j(x)|^2 dx < \infty.$$

Докажем еще, что ядро $K(x, s)$ удовлетворяет условию (A), если этому условию удовлетворяют ядра системы (1). Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_a^{nb-(n-1)a} |K(x, s)|^2 dx &= \sum_{l=1}^n \int_{(l-1)b-(l-2)a}^{lb-(l-1)a} |K(x, s)|^2 ds = \\ &= \sum_{l=1}^n \int_a^b |K(x, s + (l-1)(b-a))|^2 ds. \end{aligned}$$

Пусть $(j-1)b - (j-2)a \leq x < jb - (j-1)a$. Тогда в l -ом слагаемом последней суммы

$$\begin{aligned} K(x, s + (l-1)(b-a)) &= \\ &= K_{jl}(x - (j-1)(b-a), s) = K_{jl}(x', s), \end{aligned}$$

где $x' = x - (j-1)(b-a)$. Очевидно, $a \leq x' \leq b$. Теперь

$$\int_a^{nb-(n-1)a} |K(x, s)|^2 ds = \sum_{l=1}^n \int_a^b |K_{jl}(x', s)|^2 ds \leq \sum_{l=1}^n A_{jl} \leq A,$$

где

$$A = \max_j \sum_{l=1}^n A_{jl}.$$

§ 18. Примеры нефредгольмовских интегральных уравнений

В настоящем параграфе мы приводим несколько примеров интегральных уравнений, для которых делаются неверными те или иные теоремы Фредгольма. Естественно, во всех этих примерах требование квадратичной суммируемости ядра в основном квадрате оказывается нарушенным.

№ 1. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|} \varphi(s) ds = f(x). \quad (1)$$

Ядро этого уравнения $K(x, s) = e^{-|x-s|}$ не квадратично суммируемо. В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(x, s)|^2 dx ds = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-s|} ds. \quad (2)$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-s|} ds = \int_{-\infty}^x e^{-2(x-s)} ds + \int_x^{\infty} e^{-2(s-x)} ds = 1; \quad (3)$$

ясно, что интеграл (2) бесконечен. Любопытно, что ядро $e^{-|x-s|}$ удовлетворяет условию (A)—это видно из формулы (3).

Уравнение (1) решается следующим образом. Обе его части подвергнем преобразованию Фурье, для чего умножим

это уравнение на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixt}$ и проинтегрируем по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Обозначим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \varphi(x) dx = \Phi(t),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x) dx = F(t)$$

и вычислим двойной интеграл

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt-|x-s|} \varphi(s) ds dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt-|x-s|} dx. \end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле сделаем подстановку $x = s + y$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt-|x-s|} dx = e^{-ist} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt-|y|} dy.$$

Последний интеграл легко берется:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt-|y|} dy = \int_{-\infty}^0 e^{y(1-it)} dy + \int_0^{+\infty} e^{-y(1+it)} dy = \frac{2}{1+t^2}.$$

Теперь

$$I = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+t^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} \varphi(s) ds = \frac{2}{1+t^2} \Phi(t),$$

и мы приходим к очень простому уравнению

$$\left(1 - \frac{2\lambda}{1+t^2}\right) \Phi(t) = F(t). \quad (4)$$

Если $\lambda < \frac{1}{2}$, то $1 - \frac{2\lambda}{1+t^2} \neq 0$. В этом случае

$$\Phi(t) = \frac{1+t^2}{1+t^2-2\lambda} F(t) \quad (5)$$

и, применяя обратное преобразование Фурье, мы приходим к решению уравнения (1):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \Phi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^2-2\lambda} F(t) dt. \quad (6)$$

Если же $\lambda \geq \frac{1}{2}$, то функция $\Phi(t)$, определяемая формулой (5), будет, вообще говоря, несуммируемой, а в таком случае уравнение (1) неразрешимо. Итак, значения параметра, при которых нефредгольмовское уравнение (1) не всегда имеет решение, не изолированы, а заполняют луч $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Напомним, что для уравнений Фредгольма такое явление невозможно: из теорем 1 и 2 Фредгольма вытекает, что значения λ , для которых уравнение Фредгольма не всегда разрешимо (это суть характеристические значения λ), расположены изолированно.

Заметим еще, что значения $\lambda > \frac{1}{2}$, при которых уравнение (1) может оказаться неразрешимым, не суть характеристические числа этого уравнения. Действительно, если $f(x) \equiv 0$, то $F(t) \equiv 0$, а тогда из уравнений (5) и (6) вытекает, что необходимо $\varphi(x) \equiv 0$. Таким образом, при любом λ однородное уравнение (1) имеет только тривиальное решение; это значит, что упомянутое уравнение не имеет характеристических чисел.

Сходные результаты можно получить для более общего уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s) \varphi(s) ds = f(x),$$

если его ядро удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x)| dx < \infty.$$

п° 2. Пусть Γ — гладкий замкнутый контур, расположенный в комплексной плоскости. Интеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta, \quad t \in \Gamma \quad (7)$$

расходится в обычном смысле, однако, он существует в весьма широких условиях, если его рассматривать как „главное значение интеграла“ или „сингулярный интеграл“. Вырежем точку t окружностью радиуса ε с центром в t ; оставшуюся часть контура Γ обозначим через Γ_{ε} . Сингулярный интеграл определяется формулой

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta.$$

Сингулярные интегралы вида (7) играют большую роль в теории функций комплексного переменного и в приложениях этой теории благодаря известной теореме о предельных значениях интеграла типа Коши, доказанной Сохоцким и, позднее, Племелем. Пусть z — произвольная точка комплексной плоскости, не лежащая на Γ . Положим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Пусть $z \rightarrow t \in \Gamma$. Предельные значения функции $\Phi(z)$, когда $z \rightarrow t$ соответственно изнутри или извне Γ , обозначим через $\Phi_i(t)$ и $\Phi_e(t)$. По теореме Сохоцкого — Племеля¹⁾

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta,$$

$$\Phi_e(t) = -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta.$$

Пусть функция $\varphi(z)$ регулярна внутри Γ и непрерывна вплоть до Γ . Тогда $\Phi(z) \equiv 0$ вне Γ , и $\Phi_e(t) \equiv 0$, или

$$\varphi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta \equiv 0. \quad (8)$$

¹⁾ См., например, А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, 1950.

Эта формула показывает, что $\lambda = 1$ есть характеристическое число „сингулярного“ интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \frac{\lambda}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = 0, \quad (9)$$

и этому характеристическому числу соответствует бесконечное множество линейно независимых собственных функций — ими являются предельные на Γ значения функций, регулярных внутри Γ и непрерывных вплоть до Γ .

Пусть теперь $\varphi(z)$ регулярна вне Γ и $\varphi(\infty) = 0$. Тогда $\Phi(z) \equiv 0$ внутри Γ , $\Phi_i(t) \equiv 0$ и

$$\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta \equiv 0. \quad (10)$$

Это равенство означает, что уравнение (9) имеет еще одно характеристическое число $\lambda = -1$, которому также соответствует бесконечное множество линейно независимых собственных функций; на этот раз ими являются предельные значения функций, регулярных вне Γ , обращающихся в нуль на бесконечности и непрерывных вплоть до Γ . Для уравнения (9) неверна теорема 3 Фредгольма, по которой каждому характеристическому числу соответствует только конечное число линейно независимых собственных функций.

п° 3. Пусть Γ — окружность радиуса единица с центром в начале координат, и пусть $|\lambda| > 1$. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$\varphi(t) + \frac{\lambda}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{t}{\zeta - t} \varphi(\zeta) d\zeta - \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{t}{\zeta} \varphi(\zeta) d\zeta = 0. \quad (11)$$

Докажем, что этому уравнению удовлетворяет функция

$$\varphi(t) = \frac{t}{\lambda t - 1}. \quad (12)$$

Имеем

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda(\lambda t - 1)}.$$

Функция $\varphi_1(z) = \frac{1}{\lambda}$ регулярна внутри Γ , а функция $\varphi_2(z) = \frac{1}{\lambda(\lambda z - 1)}$ регулярна вне Γ и обращается в нуль на

бесконечности; обе функции непрерывны вплоть до Γ . По формулам (8) и (10)

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_2(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = -\frac{1}{\lambda(\lambda t - 1)}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda(\lambda t - 1)}.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{\lambda}.$$

Подставив это в левую часть уравнения (11), получим

$$\frac{t}{\lambda t - 1} + t - \frac{t}{\lambda t - 1} - t \equiv 0.$$

Мы выяснили, следовательно, что при любом λ , превосходящем единицу по модулю, однородное уравнение (11) имеет нетривиальное решение (12); это значит, что любое λ , $|\lambda| > 1$, есть характеристическое число уравнения (11), и совокупность этих чисел заполняет всю внешность единичного круга. Для уравнения (11) неверна теорема 1 Фредгольма.

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ РИСА — ШАУДЕРА

Ф. Рис и Ю. С. Шаудер распространили теорию Фредгольма на широкий класс уравнений, которые отличаются от уравнений Фредгольма тем, что в них оператор Фредгольма заменен так называемым вполне непрерывным оператором. В настоящей главе мы будем рассматривать вполне непрерывные операторы, действующие в классе квадратично суммируемых функций.

§ 19. Основные понятия об операторах

Будем, как и в гл. I, рассматривать множество функций, квадратично суммируемых в конечном или бесконечном промежутке (a, b) ; в настоящей главе мы будем систематически пользоваться обычным обозначением этого множества $L_2(a, b)$. Будем говорить, что на $L_2(a, b)$ задан некоторый оператор A , если каждой функции $\varphi(x) \in L_2(a, b)$ по некоторому закону приводится в соответствие одна и только одна функция $\psi(x) = A\varphi$, и если $\psi(x) \in L_2(a, b)$. Говорят, что оператор A *переводит*, или *преобразует* функцию $\varphi(x)$ в функцию $\psi(x) = A\varphi$.

Сумма $A + B$ и произведение AB двух операторов определяются соотношениями

$$(A + B)\varphi = A\varphi + B\varphi, \quad AB\varphi = A(B\varphi).$$

Степени оператора A определяются формулами

$$A^1 = A, \quad A^n = AA^{n-1}.$$

Оператор A называется *линейным*, если для любой пары квадратично суммируемых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и любых постоянных a и b справедливо тождество

$$A(a\varphi + b\psi) = aA\varphi + bA\psi. \quad (1)$$

По индукции легко доказывается, что линейный оператор удовлетворяет и более общему тождеству

$$A\left(\sum_{j=1}^n a_j \varphi_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j A\varphi_j,$$

где n — конечное число, a_j — постоянные и $\varphi_j(x)$ — квадратично суммируемые функции. Полагая в тождестве (1) $b=0$, найдем, что $A(a\varphi) = aA\varphi$; при $a=0$ получаем $A0=0$. Таким образом, всякий линейный оператор переводит функцию, тождественно равную нулю, в ту же самую функцию.

Линейный оператор называется *ограниченным*, если существует такая постоянная C , что, какова бы ни была квадратично суммируемая функция $\varphi(x)$, имеет место неравенство

$$\|A\varphi\| \leq C\|\varphi\|. \quad (2)$$

Постоянные C очевидно неотрицательны и потому их множество ограничено снизу и имеет точную нижнюю границу. Точная нижняя граница постоянных C в неравенстве (2) называется *нормой оператора A* и обозначается символом $\|A\|$. По определению точной нижней границы, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такая постоянная C , удовлетворяющая неравенству (2), что $C < \|A\| + \varepsilon$. Но тогда тем более удовлетворяется соотношение

$$\|A\varphi\| \leq (\|A\| + \varepsilon)\|\varphi\|;$$

полагая в нем $\varepsilon \rightarrow 0$, приходим к важному неравенству

$$\|A\varphi\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi\|. \quad (3)$$

Очевидно теперь, что норму оператора A можно определить и как наименьшую из постоянных C , удовлетворяющих неравенству (2).

Важным примером ограниченного оператора является оператор Фредгольма

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds, \quad (4)$$

ядро которого подчинено условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds = B^2 < \infty. \quad (B)$$

Линейность этого оператора очевидна, а ограниченность вытекает из неравенства (2) § 3; из этого неравенства вытекает также, что

$$\|K\| \leq B. \quad (5)$$

Ограничен, очевидно, и тождественный оператор I . Действительно, он линейен и, кроме того, так как $I\varphi = \varphi(x)$, то $\|I\varphi\| = \|\varphi\|$. Отсюда

$$\|I\| = 1. \quad (6)$$

Ограниченный оператор A непрерывен в следующем смысле: если $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$, то $A\varphi_n \rightarrow A\varphi$; здесь и ниже, во всей гл. II, под сходимостью понимается сходимость в среднем. Доказательство непрерывности ограниченного оператора весьма просто:

$$\|A\varphi_n - A\varphi\| = \|A(\varphi_n - \varphi)\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi_n - \varphi\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Если A и B ограниченные операторы, то $A+B$ и AB также ограничены, причем

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|. \quad (7)$$

Действительно, по неравенству треугольника

$$\begin{aligned} \|(A+B)\varphi\| &= \|A\varphi + B\varphi\| \leq \|A\varphi\| + \\ &+ \|B\varphi\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|\varphi\|. \end{aligned}$$

Точно так же

$$\|AB\varphi\| \leq \|A\| \cdot \|B\varphi\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|\varphi\|.$$

Как следствие получается неравенство для нормы степени оператора

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n. \quad (8)$$

Для $n=2$ это неравенство получается из (7) при $B=A$; для произвольного натурального n оно получается по индукции.

Ниже мы будем рассматривать, не оговаривая этого, только линейные ограниченные операторы.

Оператор A^* называется *сопряженным* с оператором A , если для любой пары квадратично суммируемых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ справедливо тождество

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi). \quad (9)$$

Так, для оператора Фредгольма (4) сопряженным является оператор

$$K^*\varphi = \int_a^b \overline{K(s, x)} \varphi(s) ds.$$

Оператор не может иметь более одного сопряженного: если оператор A имеет два сопряженных A_1^* и A_2^* , то для любой пары функций $\varphi(x) \in L_2(a, b)$ и $\psi(x) \in L_2(a, b)$ имеем

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A_1^*\psi) = (\varphi, A_2^*\psi).$$

Отсюда $(\varphi, A_1^*\psi - A_2^*\psi) = 0$. Так как это тождество верно для любой функции $\varphi \in L_2(a, b)$, то положим $\varphi = A_1^*\psi - A_2^*\psi$. Это дает нам $\|A_1^*\psi - A_2^*\psi\| = 0$ и, следовательно, $A_1^*\psi = A_2^*\psi$, что и требовалось доказать. Очевидно сопряженность ограниченных операторов есть свойство взаимное, так что $A^{**} = A$.

Сопряженный оператор линеен. Действительно, пусть a и b — постоянные. Имеем

$$(A\varphi, a\psi + b\omega) = (\varphi, A^*(a\psi + b\omega)).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} A\varphi, a\psi + b\omega) &= \bar{a}(A\varphi, \psi) + \bar{b}(A\varphi, \omega) = \\ &= \bar{a}(\varphi, A^*\psi) + \bar{b}(\varphi, A^*\omega) = (\varphi, aA^*\psi + bA^*\omega). \end{aligned}$$

Из только что доказанной единственности сопряженного оператора следует

$$A^*(a\psi + b\omega) = aA^*\psi + bA^*\omega,$$

что и требовалось доказать.

Исходя из определения сопряженного оператора, нетрудно доказать, что $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$, $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$, $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$, где λ — постоянная; в частности $(A^n)^* = (A^*)^n$.

Теорема. *Всякий ограниченный оператор имеет сопряженный, который также ограничен и имеет ту же норму, что и данный оператор.*

Пусть $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ — полная ортонормированная в $L_2(a, b)$ последовательность и A — данный ограниченный оператор. Зададим произвольную квадратично суммируемую в (a, b) функцию $\psi(x)$ и составим числа

$$a_n = \overline{(A\varphi_n, \psi)} = (\psi, A\varphi_n).$$

Докажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \quad (10)$$

сходится. С этой целью составим функцию

$$\omega^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

и рассмотрим скалярное произведение $(A\omega^{(n)}, \psi)$. Имеем

$$(A\omega^{(n)}, \psi) = \sum_{k=1}^n a_k (A\varphi_k, \psi) = \sum_{k=1}^n |a_k|^2.$$

С другой стороны

$$|(A\omega^{(n)}, \psi)| \leq \|A\omega^{(n)}\| \cdot \|\psi\| \leq \|A\| \cdot \|\omega^{(n)}\| \cdot \|\psi\|.$$

Но

$$\begin{aligned} \|\omega^{(n)}\|^2 &= (\omega^{(n)}, \omega^{(n)}) = \left(\sum_{j=1}^n a_j \varphi_j, \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right) = \\ &= \sum_{j,k=1}^n a_j \bar{a}_k (\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{k=1}^n |a_k|^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \|A\| \cdot \|\psi\| \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \|A\|^2 \cdot \|\psi\|^2.$$

Таким образом, отрезки ряда (10) ограничены, а тогда самый ряд сходится. Но в таком случае ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

сходится в среднем к некоторой квадратично суммируемой функции $\omega(x)$; это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega\| = 0.$$

Таким образом, по каждой заданной квадратично суммируемой функции $\psi(x)$ мы строим новую квадратично суммируемую функцию $\omega(x)$; тем самым мы определили оператор $B\psi = \omega(x)$. Докажем, что $B = A^*$.

Пусть $\varphi(x) \in L_2(a, b)$. Разложим $\varphi(x)$ в ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x), \quad \alpha_k = (\varphi, \varphi_k),$$

и положим

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x),$$

так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0.$$

Имеем

$$(A\varphi^{(n)}, \psi) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (A\varphi_k, \psi) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{a}_k.$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{a}_k = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k (\varphi, \varphi_k) = \left(\varphi, \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right) = (\varphi, \omega^{(n)}).$$

Таким образом,

$$(A\varphi^{(n)}, \psi) = (\varphi, \omega^{(n)}).$$

Докажем, что в пределе, при $n \rightarrow \infty$, это равенство переходит в следующее

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, \omega) = (\varphi, B\psi). \quad (11)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |(A\varphi, \psi) - (A\varphi^{(n)}, \psi)| &= |(A(\varphi - \varphi^{(n)}), \psi)| \leq \\ &\leq \|A(\varphi - \varphi^{(n)})\| \cdot \|\psi\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi - \varphi^{(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0; \\ |(\varphi, \omega) - (\varphi, \omega^{(n)})| &= |(\varphi, \omega - \omega^{(n)})| \leq \|\varphi\| \cdot \|\omega - \omega^{(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Из формулы (11), в силу определения сопряженного оператора, вытекает, что оператор A^* , сопряженный с A , существует и равен B .

В тождестве (9) положим $\varphi = A^*\psi$, что дает нам

$$\|A^*\psi\|^2 = (AA^*\psi, \psi).$$

Оценивая правую часть по неравенству Буняковского, имеем

$$\|A^*\psi\|^2 \leq \|AA^*\psi\| \cdot \|\psi\| \leq \|A\| \cdot \|A^*\psi\| \cdot \|\psi\|.$$

Отсюда $\|A^*\psi\| \leq \|A\| \cdot \|\psi\|$. Это неравенство показывает, что оператор A^* ограничен и что $\|A^*\| \leq \|A\|$. Полагая теперь в (9) $\psi = A\varphi$, точно так же найдем, что $\|A\| \leq \|A^*\|$ и, окончательно, $\|A^*\| = \|A\|$.

Все сказанное в настоящем параграфе без изменений переносится на тот случай, когда рассматриваемые функции зависят не от одной, а от нескольких независимых переменных и, в соответствии с этим, квадратично суммируемы не на отрезке, а в некоторой области, или, вообще, на некотором измеримом множестве пространства любого числа измерений.

§ 20. Метод последовательных приближений для уравнений, содержащих ограниченный оператор

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda A\varphi = f(x); \quad f(x) \in L_2(a, b); \quad (1)$$

оператор A предполагаем линейным и ограниченным.

Теорема. Если $|\lambda| < \|A\|^{-1}$, то уравнение (1) имеет решение $\varphi(x) \in L_2(a, b)$, и притом единственное. Это решение может быть получено как предел последовательных приближений, которые сходятся к $\varphi(x)$ в среднем.

За начальное приближение $\varphi_0(x)$ примем свободный член $f(x)$. Если приближение $\varphi_{n-1}(x)$ уже построено, то

следующее приближение $\varphi_n(x)$ определим формулой

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda A \varphi_{n-1}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \dots + \lambda^n A^n f = \sum_{k=0}^n \lambda^k A^k f. \quad (3)$$

Докажем, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится в среднем к некоторому пределу. Для этого оценим разность $\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)$.

Имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| &= |\lambda| \cdot \|A \varphi_{n-1} - A \varphi_{n-2}\| = \\ &= |\lambda| \cdot \|A(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})\|; \end{aligned}$$

по неравенству (3) § 19

$$\|A(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\|$$

и, следовательно,

$$\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| \leq |\lambda| \cdot \|A\| \cdot \|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\|.$$

Применив эту оценку к разности $\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}$, получим

$$\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| \leq |\lambda|^2 \|A\|^2 \cdot \|\varphi_{n-2} - \varphi_{n-3}\|;$$

продолжая этот процесс, получим в конечном счете

$$\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| \leq (|\lambda| \cdot \|A\|)^{n-1} \|\varphi_1 - \varphi_0\|. \quad (4)$$

Теперь нетрудно оценить разность $\varphi_n - \varphi_m$. Пусть для определенности $n > m$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_m\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| \leq \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\|, \end{aligned}$$

и по неравенству (4)

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \frac{(|\lambda| \cdot \|A\|)^m}{1 - |\lambda| \cdot \|A\|} \|\varphi_1 - \varphi_0\|.$$

Так как $|\lambda| \cdot \|A\| < 1$, то

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0,$$

а это означает существование предела

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x). \quad (5)$$

Из формулы (3) ясно также, что

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m A^m f; \quad (5a)$$

ряд (5a) сходится к своей сумме $\varphi(x)$ в среднем. Формула (5a) задает $\varphi(x)$ как значение некоторого оператора над f ; мы его будем записывать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \Gamma_\lambda f; \quad \Gamma_\lambda f = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} A^m f. \quad (6)$$

Если $|\lambda| \leq \|A\|^{-1}$, то оператор Γ_λ ограничен. Действительно, по неравенству треугольника

$$\|\Gamma_\lambda f\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda|^{m-1} \|A^m f\|;$$

применив неравенство (8) § 19, получим

$$\|\Gamma_\lambda f\| \leq \frac{\|A\|}{1 - |\lambda| \cdot \|A\|} \|f\|.$$

Это и доказывает, что оператор Γ_λ ограничен, причем

$$\|\Gamma_\lambda\| \leq \frac{\|A\|}{1 - |\lambda| \|A\|}. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что функция $\varphi(x)$, определяемая формулой (5), удовлетворяет уравнению (1). Действительно, положим в соотношении (2) $n \rightarrow \infty$. Левая часть сходится к $\varphi(x)$, а правая, в силу непрерывности ограниченного оператора A , сходится к $f(x) + \lambda A\varphi$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, остается убедиться, что решение (5) — единственное. Пусть уравнение (1) имеет еще одно решение $\psi(x)$. Тогда

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda A\varphi, \quad \psi(x) = f(x) + \lambda A\psi.$$

Вычитая и полагая $\varphi(x) - \psi(x) = \omega(x)$, получим

$$\omega(x) = \lambda A\omega.$$

Отсюда

$$\|\omega\| = |\lambda| \cdot \|A\omega\| \leq |\lambda| \cdot \|A\| \cdot \|\omega\|,$$

или $\|\omega\|(1 - |\lambda| \cdot \|A\|) \leq 0$. Так как $|\lambda| \cdot \|A\| < 1$, то необходимо $\|\omega\| = 0$ и, следовательно, $\psi(x) \equiv \varphi(x)$.

Уравнение

$$\omega(x) - \bar{\lambda} A^* \omega = g(x) \quad (8)$$

называется *сопряженным* с уравнением (1). Так как $\|A^*\| = \|A\|$, то уравнение (8) разрешимо по методу последовательных приближений, при том же условии $|\lambda| < \|A\|^{-1}$; решение имеет вид

$$\omega(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\lambda}^m A^{*m} g, \quad (9)$$

что, очевидно, можно представить в такой форме:

$$\omega(x) = g(x) + \bar{\lambda} (\Gamma_{\lambda})^* g. \quad (10)$$

§ 21. Вполне непрерывные операторы

Оператор T называется *вырожденным* или *конечномерным*, если он может быть представлен в виде

$$T\varphi = \sum_{k=1}^n (\varphi, b_k) a_k(x), \quad (1)$$

где число n конечное, $a_k(x)$ и $b_k(x)$ — данные функции, квадратично суммируемые в (a, b) . Заметим, что вырожденный оператор есть интегральный оператор с вырожденным ядром

$$T\varphi = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds,$$

где

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \overline{b_k(s)}.$$

Оператор T называется *вполне непрерывным*, если его при любом заранее заданном $\varepsilon > 0$ можно представить в виде

$$T\varphi = T'\varphi + T''\varphi, \quad (2)$$

где $T''\varphi$ вырожденный оператор и $\|T'\| < \varepsilon^1$.

Приведем два важных примера вполне непрерывных операторов.

1. Оператор Фредгольма вполне непрерывен. Это непосредственно вытекает из полученного в § 10 разложения ядра оператора Фредгольма на сумму ядер малого и вырожденного и из неравенства (5) § 19.

2. Если область интегрирования D — конечная, то оператор со слабой особенностью вполне непрерывен. Пусть

$$K(P, Q) = \frac{A(P, Q)}{r^\alpha}; \quad 0 < \alpha < m,$$

где m — размерность области D , и пусть еще

$$|A(P, Q)| \leq C = \text{const.}$$

Зададим число $\eta > 0$ и положим

$$K(P, Q) = L(P, Q) + M(P, Q),$$

где

$$L(P, Q) = \begin{cases} K(P, Q), & r \geq \eta, \\ 0, & r < \eta \end{cases}$$

и

$$M(P, Q) = \begin{cases} 0, & r \geq \eta, \\ K(P, Q), & r < \eta. \end{cases}$$

Обозначим через K , L и M интегральные операторы с ядрами $K(P, Q)$, $L(P, Q)$ и $M(P, Q)$ соответственно. Тогда $K = L + M$.

Докажем, что при η достаточно малом $\|M\| < \frac{\varepsilon}{2}$, где ε любое наперед заданное положительное число. Имеем

$$|M\varphi|^2 = \left| \int_{r < \eta} \frac{A(P, Q)}{r^\alpha} \varphi(Q) dV_Q \right|^2 \leq C^2 \left\{ \int_{r < \eta} \frac{|\varphi(Q)|}{r^\alpha} dV_Q \right\}^2.$$

¹⁾ Обычно принимается другое определение: вполне непрерывным называется оператор, который переводит любое ограниченное множество в компактное. В рассматриваемом нами случае оператора, вполне непрерывного в классе L_2 , оба определения эквивалентны.

Далее,

$$\left\{ \int_{r < \eta} \frac{|\varphi(Q)|}{r^\alpha} dV_Q \right\}^2 = \left\{ \int_{r < \eta} \frac{|\varphi(Q)|}{r^{\alpha/2}} \cdot \frac{dV_Q}{r^{\alpha/2}} \right\}^2 \leq \\ \leq \int_{r < \eta} \frac{|\varphi(Q)|^2}{r^\alpha} dV_Q \int_{r < \eta} \frac{dV_Q}{r^\alpha}.$$

Последний интеграл просто вычисляется. Введя сферические координаты с центром в точке P , имеем

$$\int_{r < \eta} \frac{dV_Q}{r^\alpha} = \int_S dS \int_0^\eta r^{m-1-\alpha} dr = \frac{|S| \eta^{m-\alpha}}{m-\alpha},$$

где S — сфера радиуса единица в m -мерном пространстве и $|S|$ — площадь ее поверхности. Теперь

$$|M\varphi|^2 \leq \frac{C^2 |S| \eta^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int_{r < \eta} \frac{|\varphi(Q)|^2}{r^\alpha} dV_Q \leq \\ \leq \frac{C^2 |S| \eta^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int_D \frac{|\varphi(Q)|^2}{r^\alpha} dV_Q.$$

Последнее неравенство проинтегрируем по D :

$$\int_D |M\varphi|^2 dV_P \leq \frac{C^2 |S| \eta^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int_D |\varphi(Q)|^2 dV_Q \int_D \frac{dV_P}{r^\alpha},$$

или, если воспользоваться неравенством п°. 1 § 15,

$$\|M\varphi\| \leq \frac{C |S| (\eta h)^{\frac{m-\alpha}{2}}}{m-\alpha} \|\varphi\|.$$

Отсюда

$$\|M\| \leq \frac{C |S| (\eta h)^{\frac{m-\alpha}{2}}}{m-\alpha}$$

и ясно, что если η достаточно мало, то $\|M\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Зафиксируем η так, чтобы это неравенство выполнялось. Ядро $L(P, Q)$ ограничено и тем более квадратично суммируемо, оператор L есть оператор Фредгольма и, по дока-

занному, вполне непрерывен; его можно разбить на сумму вырожденного оператора, который мы обозначим K'' , и оператора L' , $\|L'\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим теперь $L' + M = K'$. Тогда $K = K' + K''$, причем K'' — вырожденный оператор, и

$$\|K'\| = \|L' + M\| \leq \|L'\| + \|M\| < \varepsilon.$$

3. В качестве третьего примера можно указать интегральный оператор

$$\int_D K(P, Q) \varphi(Q) dV_Q,$$

ядро которого допускает представление

$$K(P, Q) = \frac{A(P, Q)}{r^m [1 + |\ln r|^{1+\alpha}]},$$

где $\alpha > 0$ и функция $A(P, Q)$ ограничена; m -мерная область D по-прежнему предполагается конечной. Доказательство полной непрерывности проводится так же, как и для ядра со слабой особенностью; мы не будем на этом останавливаться подробнее.

Отметим некоторые свойства вполне непрерывных операторов.

1. Вырожденный оператор вполне непрерывен. Действительно, вырожденный оператор можно представить в форме (2) — достаточно положить $T' = 0$.

2. вполне непрерывный оператор ограничен. Пусть $T''\varphi = \sum_{k=1}^n (\varphi, b_k) a_k(x)$ и $\|T'\| < \varepsilon$.

Тогда

$$\|T\varphi\| \leq \sum_{k=1}^n |(\varphi, b_k)| \cdot \|a_k\| + \varepsilon \|\varphi\|;$$

отсюда, по неравенству Буняковского,

$$\|T\varphi\| \leq \|\varphi\| \left[\sum_{k=1}^n \|a_k\| \cdot \|b_k\| + \varepsilon \right].$$

Это неравенство означает, что оператор T ограничен и

$$\|T\| \leq \sum_{k=1}^n \|a_k\| \cdot \|b_k\| + \varepsilon.$$

3. Оператор, сопряженный с вполне непрерывным, также вполне непрерывен. Действительно, если

$$T\varphi = \sum_{k=1}^n (\varphi, b_k) a_k(x) + T'\varphi = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + T'\varphi,$$

где $\|T'\| < \varepsilon$ и

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \overline{b_k(s)},$$

то

$$T^*\varphi = \int_a^b \overline{K(s, x)} \varphi(s) ds + T'^*\varphi.$$

Первый член справа есть вырожденный оператор, так как

$$\int_a^b \overline{K(s, x)} \varphi(s) ds = \sum_{k=1}^n (\varphi, a_k) b_k(x);$$

в то же время, по теореме § 19, $\|T'^*\| = \|T'\| < \varepsilon$.

4. Сумма конечного числа вполне непрерывных операторов вполне непрерывна. Доказательство очевидно.

5. Произведение двух операторов, из которых один вполне непрерывен, а второй ограничен, вполне непрерывно.

Пусть T вполне непрерывный, а B ограниченный оператор. Докажем, что операторы TB и BT вполне непрерывны. Зададим произвольное положительное число ε и представим $T\varphi$ в виде

$$T\varphi = \sum_{k=1}^n (\varphi, b_k) a_k(x) + T'\varphi; \quad \|T'\| < \frac{\varepsilon}{B}.$$

Тогда

$$TB\varphi = \sum_{k=1}^n (B\varphi, b_k) a_k(x) + T'B\varphi = \sum_{k=1}^n (\varphi, B^*b_k) a_k(x) + T'B\varphi.$$

Здесь B^*b_k суть вполне определенные квадратично суммируемые функции, и сумма справа есть вырожденный оператор. Далее, $\|T'B\| \leq \|T'\| \cdot \|B\| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

оператор TB вполне непрерывен. Аналогично, исходя из представления

$$BT\varphi = \sum_{k=1}^n (\varphi, b_k) Ba_k + BT'\varphi,$$

можно доказать полную непрерывность оператора BT .

§ 22. Решение уравнений Риса — Шаудера

Уравнениями Риса — Шаудера мы будем называть уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda T\varphi = f(x), \quad (1)$$

где T вполне непрерывный оператор. Как всегда, считаем, что $f(x) \in L_2(a, b)$ и $\varphi(x) \in L_2(a, b)$; $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Уравнения Риса — Шаудера можно решать тем же приемом, который в § 10 был применен к уравнению Фредгольма с невырожденным ядром. Зададим число $R > 0$ и будем рассматривать только значения λ , расположенные в круге $|\lambda| \leq R$. Оператор T разобьем на сумму $T = T' + T''$ так, чтобы $\|T'\| < \frac{1}{2R}$ и чтобы оператор T'' был вырожденным:

$$T''\varphi = \sum_{k=1}^n (\varphi, b_k) a_k(x). \quad (2)$$

Уравнение (2) запишем в виде

$$\varphi(x) - \lambda T'\varphi - \lambda T''\varphi = f(x). \quad (3)$$

Введем новую неизвестную функцию $\psi(x)$, положив

$$\varphi(x) - \lambda T'\varphi = \psi(x). \quad (4)$$

Так как $|\lambda| \cdot \|T'\| \leq R \cdot \frac{1}{2R} = \frac{1}{2}$, то уравнение (4) можно решить относительно $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k T'^k \psi;$$

введя обозначение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} T'^k \psi = \Gamma'_\lambda \psi.$$

представим это в виде

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \Gamma'_\lambda \psi. \quad (5)$$

Подставив это в уравнение (3), получим уравнение для неизвестной $\psi(x)$:

$$\psi(x) - \lambda T'' (I + \lambda \Gamma'_\lambda) \psi = f(x). \quad (6)$$

Оператор $T'' (I + \lambda \Gamma'_\lambda)$ вырожденный.

Действительно,

$$\begin{aligned} T'' (I + \lambda \Gamma'_\lambda) \psi &= T'' \psi + \lambda T'' \Gamma'_\lambda \psi = \\ &= \sum_{k=1}^n (\psi, b_k) a_k(x) + \lambda \sum_{k=1}^n (\Gamma'_\lambda \psi, b_k) a_k(x). \end{aligned}$$

Далее, $(\Gamma'_\lambda \psi, b_k) = (\psi, \Gamma_\lambda^* b_k)$, поэтому, полагая

$$c_k(x) = b_k(x) + \lambda \Gamma_\lambda^* b_k,$$

получаем

$$T'' (I + \lambda \Gamma'_\lambda) \psi = \sum_{k=1}^n (\psi, c_k) a_k(x),$$

и уравнение (6) оказывается интегральным уравнением с вырожденным ядром

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b \psi(s) \sum_{k=1}^n a_k(x) \overline{c_k(s)} ds = f(x), \quad (7)$$

которое мы решать умеем. Дальнейшие рассуждения протекают так же, как в §§ 9 и 10.

Заметим еще, что уравнение Риса — Шаудера можно свести к уравнению с вырожденным ядром и другим приемом (ср. § 10). Перенесем в уравнении (3) член $\lambda T'' \varphi$ направо и будем временно рассматривать полученную правую часть как известную. Тогда уравнение (3) решается по методу § 20:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda T'' \varphi + \lambda \Gamma'_\lambda (f + \lambda T'' \varphi).$$

Это приводит к уравнению

$$\varphi(x) - \lambda (T'' + \lambda \Gamma'_\lambda T'') \varphi = f(x) + \lambda \Gamma'_\lambda f, \quad (8)$$

в котором оператор $T'' + \lambda \Gamma'_\lambda T''$ вырожденный. Действительно,

$$\Gamma'_\lambda T'' \varphi = \Gamma'_\lambda \sum_{k=1}^n (\varphi, b_k) a_k = \sum_{k=1}^n (\varphi, b_k) \Gamma'_\lambda a_k.$$

Полагая теперь

$$g_k(x) = a_k(x) + \lambda \Gamma'_\lambda a_k,$$

имеем

$$(T'' + \lambda \Gamma'_\lambda T'') \varphi = \sum_{k=1}^n (\varphi, b_k) g_k(x),$$

и уравнение (8) есть уравнение с вырожденным ядром:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \varphi(s) \sum_{k=1}^n g_k(x) \overline{b_k(s)} ds = f(x) + \lambda \Gamma'_\lambda f. \quad (9)$$

Для дальнейшего важно следующее замечание. Рассмотрим уравнение

$$\omega(x) - \bar{\lambda} T^* \omega = g(x), \quad (10)$$

сопряженное с уравнением (1). Разобьем T на сумму $T = T' + T''$ по формуле (2) § 21. Тогда разложение $T^* = T'^* + T''^*$ соответствует той же формуле, так как T''^* вырожденный оператор, а $\|T'^*\| = \|T'\| < \epsilon$. Если теперь уравнение (1) свести к уравнению с вырожденным ядром первым из описанных выше приемов, а уравнение (10) — вторым, то мы придем к сопряженным интегральным уравнениям с вырожденными ядрами. В самом деле, действуя так, как указано, мы сведем уравнение (1) к уравнению (6), а уравнение (10) — к уравнению

$$\omega(x) - \bar{\lambda} (I + \bar{\lambda} \Gamma_\lambda^*) T''^* \omega = g(x) + \bar{\lambda} \Gamma_\lambda^* g,$$

и остается только заметить, что $T''(I + \lambda \Gamma'_\lambda)$ и $(I + \lambda \Gamma'_\lambda) T''^*$ суть сопряженные операторы; то, что эти операторы вырожденные, было выяснено выше. Напомним еще, что сопряженные интегральные уравнения с вырожденными ядрами сводятся к сопряженным линейным алгебраическим системам.

§ 23. Распространение теорем Фредгольма

Будем опять рассматривать уравнение Риса — Шаудера

$$\varphi(x) - \lambda T\varphi = f(x), \quad (1)$$

где T вполне непрерывный оператор. Будем называть значения λ правильными, если однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda T\varphi = 0 \quad (2)$$

имеет только тривиальное решение, и характеристическим, если это уравнение имеет нетривиальные решения; последние называются собственными функциями оператора T , отвечающими данному характеристическому значению λ .

Для уравнений Риса — Шаудера справедливы четыре теоремы Фредгольма, сформулированные в § 12. Мы не станем приводить доказательств этих теорем для уравнения (1), так как это привело бы к дословному повторению рассуждений § 12; укажем только, что основные факты, на которые упомянутые рассуждения опирались, имеют место и для уравнений Риса — Шаудера. Эти факты следующие:

1) в круге $|\lambda| \leq \|T\|^{-1}$ решение уравнения (1) есть аналитическая функция от λ ,

2) при произвольном λ уравнение (*) можно свести к эквивалентной алгебраической системе,

3) сопряженные уравнения (1) и

$$\omega(x) - \bar{\lambda} T^* \omega = g(x) \quad (3)$$

могут быть сведены к сопряженным алгебраическим системам.

Приведем формулировки теорем Фредгольма для уравнений Риса — Шаудера.

Теорема 1. *Вполне непрерывный оператор имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут сгущаться только на бесконечности.*

Теорема 2. *Если значение λ правильное, то как уравнение (1), так и сопряженное с ним уравнение*

$$\omega(x) - \bar{\lambda} T^* \omega = g(x) \quad (4)$$

разрешимо при любом свободном члене и решение каждого из этих уравнений единственно.

Теорема 3. Если λ — характеристическое, то сопряженные однородные уравнения (2) и

$$\omega(x) - \bar{\lambda} T^* \omega = 0 \quad (5)$$

имеют одно и то же конечное число линейно независимых собственных функций.

Теорема 4. Для того, чтобы уравнение (1) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член был ортогонален к любому решению однородного сопряженного уравнения (5).

Для уравнений Риса — Шаудера остается в силе вытекающая из теорем Фредгольма (см. конец § 12) альтернатива Фредгольма. Остается, разумеется, в силе формула (25) § 10, дающая общее решение уравнения (1), если оно разрешимо, при характеристическом значении λ .

ГЛАВА III

СИММЕТРИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 24. Симметричные ядра

Ядро $K(x, s)$ называется *симметричным*, если оно равно своему сопряженному. Симметричное ядро, следовательно, характеризуется тождеством

$$K(x, s) = K^*(x, s) = \overline{K(s, x)}. \quad (1)$$

Если ядро вещественное, то определение упрощается. Симметричное вещественное ядро определяется равенством

$$K(x, s) = K(s, x). \quad (2)$$

Оператор Фредгольма с симметричным ядром будем называть *симметричным оператором*. Если оператор K симметричен, то, очевидно, $K = K^*$. Для симметричного оператора тождество (C) (см. § 11) принимает вид

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K\psi). \quad (D)$$

Интегральное уравнение, ядро которого симметрично, будем называть *симметричным интегральным уравнением*.

На протяжении всей III гл. мы будем, не оговаривая этого, рассматривать только ядра, квадратично суммируемые в основном квадрате.

Если ядро $K(x, s)$ симметрично, то все итерированные ядра тоже симметричны. Действительно, общее соотношение (см. § 11) $(K^n)^* = (K^*)^n$ в данном случае принимает вид $(K^n)^* = K^n$. Но тогда ядра операторов $(K^n)^*$ и K^n совпадают, т. е.

$$K_n^*(x, s) = K_n(x, s).$$

Для симметричного оператора K^n имеет место тождество (D), которое в данном случае дает

$$(K^n \varphi, \psi) = (\varphi, K^n \psi); \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Примеры: Ядра $K(x, s) = 1$, $L(x, s) = \ln |x - s|$, $M(x, s) = x^2 + s^2$ симметричны — они вещественны и не изменяют своего значения при перестановке аргументов. Симметрично также и ядро $N(x, s) = i(x - s)$, так как

$$\overline{N(s, x)} = -i(s - x) = i(x - s) = N(x, s).$$

Ядро $P(x, s) = i(x + s)$ несимметрично: в этом случае

$$\overline{P(s, x)} = -i(s + x) = -P(x, s).$$

§ 25. Основные теоремы о симметричных уравнениях

Теорема 1. *Характеристические числа интегрального уравнения с симметричным ядром вещественны.*

Пусть λ_0 — характеристическое число, а $\varphi_0(x)$ соответствующая собственная функция. Тогда

$$\varphi_0(x) = \lambda_0 K \varphi_0. \quad (1)$$

По самому определению собственной функции $\varphi_0(x) \neq 0$, поэтому $\|\varphi_0\|^2 > 0$. Заметим еще, что $\lambda_0 \neq 0$ — в противном случае из уравнения (1) следовало бы, что $\varphi_0(x)$ тождественно равна нулю.

Умножая обе части уравнения (1) скалярно на $\varphi_0(x)$, получим

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \lambda_0 (K \varphi_0, \varphi_0).$$

откуда

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{(K \varphi_0, \varphi_0)}{\|\varphi_0\|^2}. \quad (2)$$

и достаточно доказать, что скалярное произведение $(K \varphi_0, \varphi_0)$ вещественно.

В силу тождества (D) имеем $(K \varphi_0, \varphi_0) = (\varphi_0, K \varphi_0)$, но на основании свойства 1 скалярного произведения (см. § 2) $(\varphi_0, K \varphi_0) = \overline{(K \varphi_0, \varphi_0)}$.

Таким образом $(K \varphi_0, \varphi_0) = \overline{(K \varphi_0, \varphi_0)}$; будучи равным своему сопряженному, число $(K \varphi_0, \varphi_0)$ вещественно. Теперь из формулы (2) вытекает, что характеристическое число λ_0 вещественно,

Теорема 2. *Собственные функции уравнения с симметричным ядром, соответствующие различным характеристическим числам, ортогональны между собой.*

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — характеристические числа симметричного ядра $K(x, s)$ и $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — соответствующие им собственные функции. Это значит, что

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 K\varphi_1, \quad \varphi_2(x) = \lambda_2 K\varphi_2.$$

Первое тождество умножим скалярно на $\varphi_2(x)$:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\lambda_1 K\varphi_1, \varphi_2) = \lambda_1 (\varphi_1, K\varphi_2).$$

Но $K\varphi_2 = \frac{1}{\lambda_2} \varphi_2$, следовательно,

$$(\varphi_1, K\varphi_2) = \left(\varphi_1, \frac{1}{\lambda_2} \varphi_2 \right) = \frac{1}{\lambda_2} (\varphi_1, \varphi_2),$$

так как по теореме 1 число λ_2 вещественно и потому оно выносится за знак скалярного произведения без изменения. Теперь

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\varphi_1, \varphi_2)$$

или

$$\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) (\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Но $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и, следовательно, необходимо $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$.

Собственные функции можно сделать нормированными: достаточно каждую из них разделить на ее норму. Далее, если одному и тому же собственному числу соответствует несколько собственных функций, то их можно сделать ортогональными между собой и нормированными, применив к ним процесс ортогонализации. Собственные функции, соответствующие разным характеристическим числам, ортогональны в силу теоремы 2. Отсюда вытекает важная для всего последующего теорема о последовательности собственных функций.

Теорема 3. *Последовательность собственных функций симметричного ядра можно сделать ортонормированной.*

В дальнейшем всегда будем считать, что последовательность собственных функций симметричного ядра ортонормирована в соответствии с теоремой 3. Условимся еще, выписывая последовательность характеристических чисел,

повторять каждое из них столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций. Мы можем тогда считать, что каждому характеристическому числу соответствует только одна собственная функция; при этом среди характеристических чисел могут оказаться равные. Условимся также нумеровать характеристические числа в порядке возрастания их абсолютных величин. Таким образом, если

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$$

— последовательность характеристических чисел некоторого симметричного ядра, и ей соответствует последовательность собственных функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \dots$$

так что

$$\varphi_n(x) - \lambda_n K \varphi_n = 0, \quad (3)$$

то

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ 1 & \text{при } j = k \end{cases} \quad (4)$$

и

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots \quad (5)$$

Если характеристических чисел бесконечно много, то, по теореме 1 Фредгольма, они сгущаются только на бесконечности и потому $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Совокупность всех характеристических чисел и соответствующих им ортонормированных собственных функций симметричного ядра будем называть *системой характеристических чисел и собственных функций* данного ядра. Очевидно, в системе характеристических чисел каждое такое число повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций.

§ 26. Теорема существования характеристического числа

Лемма 1. *Совокупность характеристических чисел второго итерированного ядра совпадает с совокупностью квадратов характеристических чисел первого ядра.*

Заметим, что эта лемма верна и для несимметричного ядра.

№ 1. Пусть λ_0 — характеристическое число ядра $K(x, s)$ и $\varphi_0(x)$ соответствующая собственная функция. Тогда

$$\varphi_0(x) = \lambda_0 K \varphi_0;$$

подставив в правую часть вместо φ_0 равную ей величину $\lambda_0 K \varphi_0$, получим

$$\varphi_0(x) = \lambda_0^2 K^2 \varphi_0$$

или, подробнее,

$$\varphi_0(x) - \lambda_0^2 \int_a^b K_2(x, s) \varphi_0(s) ds = 0.$$

Это равенство показывает, что λ_0^2 есть характеристическое число ядра $K_2(x, s)$ с соответствующей собственной функцией $\varphi_0(x)$.

№ 2. Пусть μ_0 характеристическое число второго итерированного ядра $K_2(x, s)$ и $\varphi_0(x)$ соответствующая собственная функция. Тогда

$$\varphi_0(x) - \mu_0 K^2 \varphi_0 = 0,$$

что можно также представить в виде

$$(I - \mu_0 K^2) \varphi_0 = 0.$$

Подиномы от оператора K можно складывать и умножать по обычным правилам; имея это в виду, разложим левую часть на множители:

$$(I + \sqrt{\mu_0} K)(I - \sqrt{\mu_0} K) \varphi_0 = 0. \quad (1)$$

Положим

$$(I - \sqrt{\mu_0} K) \varphi_0 = \psi(x). \quad (2)$$

Может случиться, что $\psi(x) \equiv 0$. Тогда из равенства (2) следует, что $\sqrt{\mu_0}$ есть характеристическое число ядра $K(x, s)$ с соответствующей собственной функцией $\varphi_0(x)$; в этом случае лемма доказана. Если же $\psi(x) \not\equiv 0$, то из уравнения (1), которое теперь принимает вид

$$(I + \sqrt{\mu_0} K) \psi = 0$$

вытекает, что $-\sqrt{\mu_0}$ есть характеристическое число ядра $K(x, s)$, а $\psi(x)$ — соответствующая собственная функция. Лемма доказана и в этом случае.

Замечание. Нетрудно было бы доказать, что при любом n совокупность характеристических чисел n -го итерированного ядра совпадает с совокупностью n -ых степеней характеристических чисел первого ядра.

Следствие из леммы 1. Если ядро $K(x, s)$ симметрично, то характеристические числа второго итерированного ядра положительны. Это следствие, очевидно, сразу вытекает из леммы 1 и из того, что характеристические числа симметричного ядра вещественны.

Теорема существования характеристического числа. Всякое отличное от тождественного нуля симметричное ядро имеет по крайней мере одно характеристическое число¹⁾.

Доказательство состоит из двух частей: из вывода основного неравенства и собственно доказательства теоремы.

Мы докажем, что ядро $K_2(x, s)$ имеет по крайней мере одно характеристическое число, а тогда, по лемме 1, будет иметь характеристическое число и ядро $K(x, s)$.

Рассмотрим плоскость λ и некоторое положительное число μ , обладающее тем свойством, что в круге $|\lambda| \leq \mu$ нет характеристических чисел ядра $K_2(x, s)$:

Возьмем произвольную функцию $\varphi(x) \not\equiv 0$ и построим новую функцию

$$f(x) = \varphi(x) - \mu K^2 \varphi = \varphi(x) - \mu \int_a^b K_2(x, s) \varphi(s) ds. \quad (3)$$

Очевидно, $f(x) \not\equiv 0$, иначе μ было бы характеристическим числом ядра $K_2(x, s)$.

Мы можем рассматривать уравнение (3) как интегральное уравнение относительно функции $\varphi(x)$, считая $f(x)$ известной функцией. Решив это уравнение, найдем

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^b \Gamma(x, s; \mu) f(s) ds,$$

где через $\Gamma(x, s; \mu)$ обозначена резольвента второго итерированного ядра $K_2(x, s)$. Умножив это равенство скалярно

¹⁾ Приводимое ниже доказательство принадлежит И. П. Мусковских. См. УМН, 11, в. 2 (68), 1956, стр. 199—200.

на $f(x)$, получим

$$(\varphi, f) = \|f\|^2 + \mu \int_a^b \int_a^b \Gamma(x, s; \mu) f(s) \overline{f(x)} dx ds. \quad (4)$$

Наша ближайшая цель — установить, что интеграл в формуле (4) неотрицателен. С этой целью заметим прежде всего, что в круге $|\lambda| \leq \mu$ нет характеристических чисел ядра $K_2(x, s)$ и потому в этом круге резольвента $\Gamma(x, s; \lambda)$ регулярна в том смысле, в каком это понятие установлено в § 7: двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) \overline{g(x)} dx ds$$

регулярен в указанном круге, каковы бы ни были квадратично суммируемые функции $f(x)$ и $g(x)$. В частности, в упомянутом круге регулярен интеграл

$$\int_a^b \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) \overline{f(x)} dx ds,$$

который, следовательно, разлагается в ряд по степеням λ :

$$\int_a^b \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) \overline{f(x)} dx ds = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda^{n-1}. \quad (5)$$

Полагая здесь $\lambda = \mu$, получаем

$$\int_a^b \int_a^b \Gamma(x, s; \mu) f(s) \overline{f(x)} dx ds = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu^{n-1}. \quad (6)$$

Для наших целей достаточно установить, что $\alpha_n \geq 0$.

Коэффициенты α_n легко найти из следующих соображений. При λ , достаточно малых по модулю, резольвента $\Gamma(x, s; \lambda)$ разлагается в ряд по итерированным ядрам; так как $(K^2)^n = K^{2n}$, то n -ое итерированное ядро для ядра $K_2(x, s)$ есть $K_{2n}(x, s)$, поэтому

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_{2n}(x, s), \quad (7)$$

При малых λ ряд (7) можно, умножив на квадратично суммируемую функцию, интегрировать почленно. Это дает нам значения коэффициентов α_n :

$$\alpha_n = \int_a^b \int_a^b K_{2n}(x, s) f(s) \overline{f(x)} dx ds. \quad (8)$$

Упростим выражение (8). Имеем

$$\int_a^b K_{2n}(x, s) f(s) ds = K^{2n} f.$$

Отсюда

$$\alpha_n = (K^{2n} f, f) = (K^n (K^n f), f);$$

по формуле (3) § 24

$$\alpha_n = (K^n f, K^n f) = \|K^n f\|^2 \geq 0.$$

Теперь выражение (4) приводится к виду

$$(\varphi, f) = \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \|K^n f\|^2. \quad (9)$$

Из формулы (9) вытекает, что $(\varphi, f) > 0$.

Вернемся к уравнению (3). Обе его части умножим скалярно слева на $\varphi(x)$:

$$(\varphi, f) = (\varphi, \varphi) - \mu (\varphi, K^2 \varphi).$$

В силу тождества (D) § 24

$$(\varphi, K^2 \varphi) = (\varphi, K(K\varphi)) = (K\varphi, K\varphi) = \|K\varphi\|^2$$

и, следовательно,

$$(\varphi, f) = \|\varphi\|^2 - \mu \|K\varphi\|^2. \quad (10)$$

Так как $(\varphi, f) > 0$, то выражение (10) положительно. Отсюда вытекает неравенство

$$\|K\varphi\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|\varphi\|, \quad (11)$$

верное для любой квадратично суммируемой функции $\varphi(x)$.

Напомним, что в неравенстве (11) μ таково, что в круге $|\lambda| \leq \mu$ нет характеристических чисел ядра $K_2(x, s)$.

Допустим теперь, что ядро $K_2(x, s)$ не имеет ни одного характеристического числа. В таком случае число μ можно взять сколь угодно большим; более того, можно считать, что $\mu \rightarrow \infty$. Выполнив в неравенстве (11) этот предельный переход, получим, что $\|K\varphi\| \leq 0$.

Отсюда $K\varphi \equiv 0$, т. е.

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds \equiv 0. \quad (12)$$

Нетрудно доказать, что в таком случае ядро $K(x, s) \equiv 0$. Действительно, произвольным образом зафиксируем число x , но так, чтобы при этом значении x интеграл

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds$$

существовал. Раз точка x фиксирована, то $K(x, s)$ есть функция только от s . В качестве функции $\varphi(s)$ возьмем $\overline{K}(x, s)$. Эта функция квадратично суммируема в силу выбора точки x . Из равенства (12) следует теперь, что почти для всех $x \in (a, b)$

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds \equiv 0$$

и, следовательно, $K(x, s) \equiv 0$.

Итак, если ядро $K_2(x, s)$ не имеет ни одного характеристического числа, то ядро $K(x, s)$ тождественно равно нулю. Следовательно, если $K(x, s)$ отлично от тождественного нуля, то ядро $K_2(x, s)$ имеет по крайней мере одно характеристическое число, а тогда по лемме 1, исходное ядро также имеет по крайней мере одно характеристическое число. Теорема доказана.

Вернемся к неравенству (11). Оно справедливо, если в круге $|\lambda| \leq \mu$ нет характеристических чисел ядра $K_2(x, s)$, иначе говоря, если μ меньше наименьшего характери-

ческого числа этого ядра. Пусть λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число ядра $K(x, s)$, тогда λ_1^2 есть наименьшее характеристическое число ядра $K_2(x, s)$; неравенство (11) справедливо, если $\mu < \lambda_1^2$. Переходя к пределу в (11) при $\mu \rightarrow \lambda_1^2$, приходим к весьма важному неравенству

$$\|K\varphi\| \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \|\varphi\|. \quad (13)$$

В неравенстве (13) знак равенства достигается: достаточно положить $\varphi(x) = \varphi_1(x)$, где $\varphi_1(x)$ — собственная функция ядра $K(x, s)$, соответствующая характеристическому числу λ_1 . Действительно, в этом случае $\varphi_1(x) = \lambda_1 K\varphi_1$; отсюда $K\varphi_1 = \frac{1}{\lambda_1} \varphi_1(x)$ и $\|K\varphi_1\| = \frac{1}{|\lambda_1|} \|\varphi_1\|$.

Из сказанного следует, что норма симметричного оператора Фредгольма равна $\|K\| = \frac{1}{|\lambda_1|}$, где λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число этого оператора.

§ 27. Теорема Гильберта — Шмидта

Рассмотрим симметричное ядро $K(x, s)$; пусть известна система его характеристических чисел и собственных функций

$$\begin{aligned} &\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots \\ &\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x) \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Будем считать, что собственные функции ортонормированы, а характеристические числа расположены в порядке возрастания абсолютных величин, так что

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_m| \leq \dots$$

Составим новое ядро

$$K^{(n)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j(x) \overline{\varphi_j(s)}}{\lambda_j}. \quad (2)$$

Ядро $K^{(n)}(x, s)$ симметрично. Действительно,

$$\overline{K^{(n)}(s, x)} = K(x, s) - \sum_{j=1}^n \frac{\overline{\varphi_j(s)} \varphi_j(x)}{\lambda_j} = K^{(n)}(x, s),$$

так как ядро $K(x, s)$ симметрично и λ_j вещественны.

Лемма 1. Последовательности

$$\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots \\ \varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \dots$$

образуют систему характеристических чисел и соответствующих им собственных функций ядра $K^{(n)}(x, s)$.

Действительно, возьмем какие-либо соответствующие друг другу λ_m и $\varphi_m(x)$ из последовательности (1) и пусть $m > n$. Составим выражение

$$\alpha(x) = \varphi_m(x) - \lambda_m \int_a^b K^{(n)}(x, s) \varphi_m(s) ds. \quad (3)$$

Заменяя в нем $K^{(n)}(x, s)$ его значением (2), получим

$$\alpha(x) = [\varphi_m(x) - \lambda_m \int_a^b K(x, s) \varphi_m(s) ds] + \\ + \lambda_m \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j(x)}{\lambda_j} \int_a^b \varphi_m(s) \overline{\varphi_j(s)} ds.$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю потому, что $\varphi_m(x)$ и λ_m суть собственная функция и характеристическое число ядра $K(x, s)$. Далее,

$$\int_a^b \varphi_m(s) \overline{\varphi_j(s)} ds = (\varphi_m, \varphi_j) = 0, \quad m \neq j,$$

в силу ортогональности собственных функций. Таким образом $\alpha(x) \equiv 0$. Но выражение (3) есть левая часть однородного интегрального уравнения с ядром $K^{(n)}(x, s)$, и, следовательно, λ_m и $\varphi_m(x)$ при $m > n$ суть собственные числа и характеристические функции ядра $K^{(n)}(x, s)$.

Докажем обратное: если взять характеристическое число и собственную функцию ядра $K^{(n)}(x, s)$, то они найдутся среди элементов последовательностей (1) при $m > n$.

Пусть μ и $\psi(x)$ характеристическое число и соответствующая ему собственная функция ядра $K^{(n)}(x, s)$. Тогда

$$\psi(x) - \mu \int_a^b K^{(n)}(x, s) \psi(s) ds = 0.$$

Подставив вместо $K^{(n)}(x, s)$ его выражение (2), получим

$$\psi(x) - \mu \int_a^b K(x, s) \psi(s) ds + \mu \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j(x)}{\lambda_j} \int_a^b \psi(s) \overline{\varphi_j(s)} ds = 0,$$

или

$$\psi(x) - \mu K\psi + \mu \sum_{j=1}^n \frac{(\psi, \varphi_j)}{\lambda_j} \varphi_j(x) = 0. \quad (4)$$

Умножим скалярно обе части уравнения (4) на $\varphi_l(x)$, $1 \leq l \leq n$:

$$(\psi, \varphi_l) - \mu (K\psi, \varphi_l) + \mu \sum_{j=1}^n \frac{(\psi, \varphi_j)}{\lambda_j} (\varphi_j, \varphi_l) = 0. \quad (5)$$

Упростим это выражение. В силу тождества (D)

$$(K\psi, \varphi_l) = (\psi, K\varphi_l) = \left(\psi, \frac{1}{\lambda_l} \varphi_l \right) = \frac{1}{\lambda_l} (\psi, \varphi_l),$$

так как

$$\varphi_l(x) - \lambda_l K\varphi_l = 0.$$

Далее;

$$\sum_{j=1}^n \frac{(\psi, \varphi_j)}{\lambda_j} (\varphi_j, \varphi_l) = \frac{(\psi, \varphi_l)}{\lambda_l},$$

в силу ортогональности и нормированности функций $\varphi_j(x)$. Таким образом, второе и третье слагаемые в уравнении (5) взаимно уничтожаются и, следовательно,

$$(\psi, \varphi_l) = 0; \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Теперь уравнение (4) принимает вид

$$\psi(x) - \mu K\psi = 0.$$

Из последнего равенства непосредственно следует, что μ — характеристическое число и $\psi(x)$ — собственная функция ядра $K(x, s)$, а в таком случае они содержатся в последовательности (1). Но по соотношению (6) функция $\psi(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_j(x)$, где $j = 1, 2, \dots, n$, а в таком случае она может совпадать только с какой-либо функцией последовательности (1) с индексом $m > n$.

Следствие 1. *Наименьшее по модулю характеристическое число ядра $K^{(n)}(x, s)$ есть λ_{n+1} , если только ядро $K(x, s)$ имеет более n характеристических чисел.*

Рассмотрим частный случай, когда данное ядро имеет только конечное число характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Тогда ядро $K^{(m)}(x, s)$ не имеет ни одного характеристического числа; по теореме существования характеристического числа, $K^{(m)}(x, s) \equiv 0$, или

$$K(x, s) = \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j(x) \overline{\varphi_j(s)}}{\lambda_j}. \quad (7)$$

Формула (7) показывает, что ядро $K(x, s)$ вырожденное. Вспоминая (см. § 9), что всякое вырожденное ядро имеет только конечное число характеристических чисел, приходим к следующему заключению.

Следствие 2. *Для того чтобы система характеристических чисел и собственных функций симметричного квадратично суммируемого ядра была конечной, необходимо и достаточно, чтобы это ядро было вырожденным. В этом случае ядро может быть представлено в форме (7).*

Следствие 3. *Какова бы ни была квадратично суммируемая функция $\varphi(x)$, имеет место соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K^{(n)}\varphi\| = 0. \quad (8)$$

Равенство (8) очевидно, если ядро $K(x, s)$ вырожденное: в этом случае при n достаточно большом $K^{(n)}(x, s) \equiv 0$ и $K^{(n)}\varphi \equiv 0$. Если ядро $K(x, s)$ невырожденное, то λ_{n+1} есть наименьшее по модулю характеристическое число ядра $K^{(n)}(x, s)$. По неравенству (13) § 26

$$\|K^{(n)}\varphi\| \leq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} \|\varphi\|$$

и, так как $\frac{1}{\lambda_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то и $\|K^{(n)}\varphi\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Теорема 1 (Гильберта—Шмидта). Пусть $K(x, s)$ симметричное ядро, и пусть $h(x)$ — произвольная квадратично суммируемая в основном промежутке (a, b) функция. Тогда функция

$$f(x) = Kh = \int_a^b K(x, s) h(s) ds \quad (9)$$

разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по собственным функциям ядра $K(x, s)$.

Функции, которые можно представить по формуле (9), часто называют *представимыми через ядро*. По существу же такие функции представляют собой значения оператора K .

Составим ряд Фурье функции $h(s)$ по последовательности собственных функций ядра $K(x, s)$:

$$h(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} h_n \varphi_n(s), \quad h_n = (h, \varphi_n).$$

Напомним, что в силу неравенства Бесселя ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|^2$$

сходится.

Далее, составим ряд Фурье функции $f(x)$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x) \quad (10)$$

и вычислим его коэффициенты. Имеем $f_n = (f, \varphi_n)$; но $f(x) = Kh$, следовательно,

$$f_n = (Kh, \varphi_n) = (h, K\varphi_n),$$

а так как $K\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x)$, то окончательно

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n} (h, \varphi_n) = \frac{h_n}{\lambda_n} \quad (11)$$

и ряд (10) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x). \quad (12)$$

Так как $h(x)$ квадратично суммируема в основном промежутке, то в том же промежутке квадратично суммируема и функция $f(x)$ (см. § 3). В данном случае ее ряд Фурье (12) сходится в среднем. Докажем, что сумма этого ряда равна $f(x)$.

Положим

$$\omega_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) - \omega_n(x) &= \int_a^b K(x, s) h(s) ds - \\ &- \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \int_a^b h(s) \overline{\varphi_k(s)} ds. \end{aligned}$$

Сумма $\omega_n(x)$ конечная, поэтому можно переставить порядок суммирования и интегрирования. Это приводит к равенству

$$f(x) - \omega_n(x) = \int_a^b K^{(n)}(x, s) h(s) ds = K^{(n)} h.$$

В силу следствия 3 из леммы 1

$$\|f - \omega_n\| = \|K^{(n)} h\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Отсюда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x).$$

Теорема Гильберта — Шмидта доказана.

Замечание. В теореме Гильберта — Шмидта полнота системы собственных функций $\{\varphi_n(x)\}$ не предполагается. Наоборот, как мы увидим ниже, теорема Гильберта — Шмидта сама позволяет во многих случаях устанавливать полноту тех или иных ортогональных систем.

Как мы видим, теорема Гильберта — Шмидта позволяет утверждать, что любая функция, представимая через ядро, разлагается в ряд Фурье по собственным функциям этого ядра, причем в общем случае полученный ряд сходится в среднем. Представляет интерес выяснение условий, при которых ряд (12) сходится не только в среднем, но и регулярно. Мы покажем (см. ниже, теорема 2), что для этого достаточно, чтобы ядро удовлетворяло условию (A). Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 2. Пусть симметричное ядро удовлетворяет условию (A), и пусть λ_n и $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, обозначают систему характеристических чисел и соответствующих им ортонормированных собственных функций этого ядра. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n(x)|^2}{\lambda_n^2} \leq A. \quad (13)$$

При фиксированном x ядро $K(x, s)$ есть квадратично суммируемая функция от s . Приведем этой функции в соответствие ее ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\overline{\varphi_n(s)}\}$:

$$K(x, s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \overline{\varphi_n(s)}.$$

Вычисляя коэффициенты этого ряда, находим

$$\alpha_n(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi_n(s) ds = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x).$$

Таким образом, ядру $K(x, s)$ приводится в соответствие ряд Фурье по его собственным функциям

$$K(x, s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n}, \quad (14)$$

называемый *билинейным рядом* ядра $K(x, s)$. Теперь по неравенству Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n(x)|^2}{\lambda_n^2} \leq \int_a^b |K(x, s)|^2 ds \leq A.$$

З а м е ч а н и е 1. Разложение (14) выясняет структуру ядра $K^{(n)}(x, s)$, определенного равенством (2): это ядро представляет собой разность между ядром $K(x, s)$ и частичной суммой его билинейного ряда.

З а м е ч а н и е 2. Члены ряда (13) положительны, и его можно интегрировать почленно. Проинтегрировав неравенство (13) в пределах от a до b и пользуясь тем, что функции $\varphi_n(x)$ нормированы, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \leq B^2. \quad (15)$$

Ниже (§ 29) будет показано, что в формуле (15) на самом деле всегда имеет место знак равенства. Заметим также, что если ядро несимметрично, то имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^2} \leq B^2.$$

это так называемое *неравенство И. Шура*.

Теорема 2. Если симметричное ядро удовлетворяет условию (A), то ряд Гильберта — Шмидта сходится регулярно.

Оценим остаток ряда (12), для чего воспользуемся неравенством Коши

$$|\sum a_k b_k|^2 \leq \sum |a_k|^2 \sum |b_k|^2;$$

это неравенство очевидно вытекает из того факта, что квадратный трехчлен

$$\sum (|a_k| \lambda - |b_k|)^2$$

неотрицателен при любых значениях вещественной переменной λ . Полагая

$$a_k = |h_k|, \quad b_k = \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right|,$$

имеем

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=n+1}^{n+p} \left| h_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \right]^2 &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |h_k|^2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}. \end{aligned}$$

На основании леммы 2

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \left| \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(x) \right| \leq \sqrt{A} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |h_k|^2}.$$

Справа написан остаток сходящегося числового ряда, поэтому при достаточно больших n сумма слева будет сколько угодно мала независимо от x . Отсюда и следует, что ряд Гильберта — Шмидта сходится регулярно.

§ 28. Решение симметричных интегральных уравнений

Симметричное интегральное уравнение есть частный случай общего уравнения Фредгольма, и для его решения можно воспользоваться общими методами гл. I. Здесь мы ставим задачу по-иному: требуется *решить симметричное интегральное уравнение, предполагая известной систему его характеристических чисел и собственных функций*. Как мы сейчас увидим, эта задача решается особенно просто.

Пусть дано симметричное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad (1)$$

свободный член которого квадратично суммируем в промежутке (a, b) . Обозначим, как обычно, через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ и $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ систему характеристических чисел и собственных функций ядра $K(x, s)$. Напомним, что решение интегрального уравнения ищется в классе квадратично суммируемых функций.

Рассмотрим сперва случай, когда значение λ правильное. Тогда уравнение (1) имеет квадратично суммируемое решение $\varphi(x)$, интеграл

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$$

есть функция, представимая через ядро, и для нее имеет место теорема Гильберта — Шмидта: если функции $\varphi(x)$ соответствует ряд Фурье

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x); \quad c_n = (\varphi, \varphi_n),$$

то по теореме Гильберта — Шмидта

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} \varphi_n(x). \quad (2)$$

Подставим значение интеграла в уравнение (1):

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} \varphi_n(x) = f(x). \quad (3)$$

Уравнение (3), очевидно, определит искомое решение $\varphi(x)$, если мы сможем вычислить коэффициенты c_n .

Умножим уравнение (3) скалярно на $\varphi_m(x)$. Пользуясь тем, что функции $\varphi_n(x)$ ортонормированы, получим:

$$c_m \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right) = f_m; \quad f_m = (f, \varphi_m). \quad (4)$$

Так как λ — правильное число, то $\frac{\lambda}{\lambda_m} - 1 \neq 0$ и

$$c_m = \frac{\lambda_m f_m}{\lambda_m - \lambda}.$$

Подставив это в уравнение (3), получаем решение уравнения (1) в следующей форме

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x). \quad (5)$$

Рассмотрим теперь случай, когда λ — характеристическое число. Пусть

$$\lambda = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_q.$$

Допуская, что уравнение (1) все же разрешимо, мы опять приходим к соотношению (4).

Если m не совпадает ни с одним из чисел $p, p+1, \dots, q$, то $1 - \frac{\lambda}{\lambda_m} \neq 0$ и по-прежнему

$$c_m = \frac{\lambda_m f_m}{\lambda_m - \lambda}.$$

Если же m равно одному из чисел $p, p+1, \dots, q$, то из соотношения (4) получаем $f_m = 0$ или, что то же,

$$(f, \varphi_m) = 0; \quad m = p, p+1, \dots, q. \quad (6)$$

Таким образом, если λ — характеристическое число, то для разрешимости интегрального уравнения необходимо, чтобы его свободный член был ортогонален ко всем собственным функциям ядра, отвечающим данному характеристическому числу.

Если условия (6) выполнены, то уравнение (4) обращается в тождество при значениях $m = p, p+1, \dots, q$. Уравнение (1) в таком случае имеет бесчисленное множество решений, которые имеют вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x) + \sum_{n=p}^q c_n \varphi_n(x). \quad (7)$$

Штрих в первой из сумм (7) означает, что должны быть опущены члены с номерами $n = p, p+1, \dots, q$, при которых числитель f_n и знаменатель $\lambda_n - \lambda$ обращаются в нуль; коэффициенты c_n во второй сумме суть произвольные постоянные.

Мы пришли к следующему результату: если значение λ — характеристическое и этому характеристическому числу соответствуют собственные функции

$$\varphi_p(x), \varphi_{p+1}(x), \dots, \varphi_q(x),$$

то необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1) является условие ортогональности свободного члена уравнения к соответствующим собственным функциям данного ядра.

Этот результат находится в полном согласии с теоремой 4 Фредгольма, так как в данном случае однородные сопряженные интегральные уравнения совпадают.

§ 29. Билинейный ряд

Билинейный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n} \quad (1)$$

был введен нами в § 27. Здесь $\{\lambda_n\}$ и $\{\varphi_n(x)\}$ система характеристических чисел и собственных функций симметричного ядра $K(x, s)$. Напомним, что билинейный ряд был получен как ряд Фурье ядра $K(x, s)$ по ортонормированной системе функций $\{\varphi_n(s)\}$.

Теорема 1. *Билинейный ряд сходится в среднем в основном квадрате и его сумма равна данному ядру. Система функций*

$$\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

ортонормирована в основном квадрате. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} \overline{\varphi_m(x)} \varphi_m(s) dx ds = \\ = \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_m(x)} dx \int_a^b \varphi_m(s) \overline{\varphi_k(s)} ds = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq m, \\ 1 & \text{при } k = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Ядру $K(x, s)$ приведем в соответствие его ряд Фурье по функциям (2):

$$K(x, s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}.$$

Коэффициенты A_n нетрудно вычислить:

$$\begin{aligned} A_n = (K(x, s), \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}) &= \int_a^b \int_a^b K(x, s) \overline{\varphi_n(x)} \varphi_n(s) ds = \\ &= \int_a^b \overline{\varphi_n(x)} dx \int_a^b K(x, s) \varphi_n(s) ds. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл равен $\frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x)$. Отсюда

$$A_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\lambda_n} \|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{\lambda_n}.$$

и

$$K(x, s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n}.$$

Выходит, что билинейный ряд есть ряд Фурье ядра $K(x, s)$ по функциям (2); как и всякий ряд Фурье, он сходится в среднем в соответствующей области, в данном случае — в основном квадрате, и его сумма в этом квадрате квадратично суммируема.

Составим теперь ядро

$$L(x, s) = K(x, s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n},$$

которое, очевидно, квадратично суммируемо в основном квадрате. Докажем, что ядро $L(x, s)$ не имеет характеристических чисел. С этой целью рассмотрим однородное уравнение

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b L(x, s) \psi(s) ds = 0, \quad (3)$$

или

$$\psi(x) - \lambda K\psi + \lambda \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n} \psi(s) ds. \quad (3a)$$

Докажем, что ряд в (3a) можно проинтегрировать почленно. При почти всех $x \in (a, b)$ существует интеграл

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds;$$

для таких x , как было показано при доказательстве леммы 2 § 27, ряд (1) есть ряд Фурье ядра $K(x, s)$, рассматриваемого как функция от s , по функциям $\{\varphi_n(s)\}$. Такой ряд

сходится в среднем по s ; в § 2 было показано, что его можно интегрировать почленно, предварительно умножив его на любую квадратично суммируемую функцию. В данном случае такой функцией является $\psi(x)$.

Выполнив в уравнении (3) почленное интегрирование, получим уравнение

$$\psi(x) - \lambda K\psi + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\psi, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x). \quad (4)$$

По теореме Гильберта — Шмидта,

$$K\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\psi, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x),$$

и уравнение (4) сразу дает нам $\psi(x) \equiv 0$. Таким образом, уравнение (3) при любом λ имеет только тривиальное решение и, значит, ядро $L(x, s)$ не имеет характеристических чисел. По теореме существования характеристического числа, $L(x, s) \equiv 0$ и, следовательно,

$$K(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n}. \quad (5)$$

Теорема доказана.

Умножая равенство (5) на $\overline{K(x, s)}$ и интегрируя по основному квадрату, получим формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds = B^2. \quad (6)$$

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормированная система функций и $\{\lambda_n\}$ — последовательность вещественных чисел, таких, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$$

сходится. Тогда ряд (1) сходится в среднем в основном квадрате и сумма этого ряда есть симметричное ядро, для которого числа λ_n и функции $\varphi_n(x)$ образуют систему характеристических чисел и соответствующих им собственных функций.

Сходимость ряда (1) непосредственно следует из теоремы Риса — Фишера. Положим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n} = K(x, s); \quad (7)$$

квадратичная суммируемость и симметричность ядра (7) очевидны.

Умножим равенство (7) на $\lambda_m \varphi_m(s)$ и проинтегрируем по s в пределах от a до b . Как уже было выяснено, интегрировать можно почленно, и мы получаем

$$\varphi_m(x) = \lambda_m \int_a^b K(x, s) \varphi_m(s) ds.$$

Отсюда видно, что λ_m и $\varphi_m(x)$ суть характеристическое число и соответствующая ему собственная функция ядра (7).

Допустим теперь, что это ядро имеет еще одну собственную функцию $\varphi(x)$, ортогональную (см. теорему 3 § 25) ко всем функциям $\varphi_n(x)$, и пусть λ соответствующее характеристическое число, так что

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds.$$

Заменяя ядро $K(x, s)$ его выражением (7) и интегрируя почленно, получаем

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x) = 0.$$

Отсюда следует, что функции $\varphi_n(x)$ образуют систему собственных функций ядра (7). Теорема доказана.

§ 30. Билинейные ряды для интегрированных ядер

Формулу Гильберта — Шмидта запишем в виде

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) h(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x) \quad (1)$$

и положим в ней $h(t) = K(t, s)$. Это можно сделать, так как при фиксированном s ядро $K(t, s)$ квадратично суммируемо по t почти для всех s . При этом

$$\begin{aligned} h_n &= \int_a^b K(t, s) \overline{\varphi_n(t)} dt = \overline{\int_a^b K(t, s) \varphi_n(t) dt} = \\ &= \overline{\int_a^b K(s, t) \varphi_n(t) dt} = \frac{1}{\lambda_n} \overline{\varphi_n(s)}, \end{aligned}$$

так как ядро $K(x, s)$ симметрично и $\varphi_n(x)$ — его собственная функция. Теперь формула Гильберта — Шмидта дает

$$K_2(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n^2}; \quad (2)$$

по теореме Гильберта — Шмидта ряд (2) сходится в среднем по x при почти всех фиксированных s . В силу симметрии ядра ряд (2) сходится также в среднем по s при почти всех фиксированных x . Более того, ряд (2) сходится в среднем в основном квадрате, так как из формулы (6) § 29 следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4}$$

сходится.

Если в (1) положить $h(t) = K_2(t, s)$, то таким же путем получим

$$K_3(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n^3};$$

по индукции легко получается общая формула

$$K_m(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n^m}. \quad (3)$$

Ряд (3) сходится в среднем в основном квадрате; из теоремы Гильберта — Шмидта вытекает, что ряд (3) сходится

в среднем по одной из переменных при почти всех фиксированных значениях другой переменной.

Формула (3) показывает, что ядро $K_m(x, s)$ разлагается в ряд Фурье по функциям $\overline{\varphi_n(s)}$. В таком случае имеет место уравнение замкнутости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n(x)|^2}{\lambda_n^{2m}} = \int_a^b |K_m(x, s)|^2 ds.$$

Члены написанного здесь ряда положительны, и его можно интегрировать почленно. Принимая во внимание, что собственные функции нормированы, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2m}} = \int_a^b \int_a^b |K_m(x, s)|^2 dx ds. \quad (4)$$

Формула (4) является основой некоторых методов приближенного вычисления характеристических чисел симметричного ядра.

Как это следует из теоремы 2 § 29, формула (3) дает разложение итерированных ядер в билинейные ряды. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Если ядро $K(x, s)$ симметрично, а $\{\lambda_n\}$ и $\{\varphi_n(x)\}$ — система его характеристических чисел и собственных функций, то при $m \geq 2$ числа $\{\lambda_n^m\}$ и функции $\{\varphi_n(x)\}$ образуют систему характеристических чисел и соответствующих этим числам собственных функций, m -го итерированного ядра $K_m(x, s)$.

Более сильное утверждение о сходимости ряда (3) можно получить, если ядро удовлетворяет условию (A).

Теорема 2. Если ядро $K(x, s)$ удовлетворяет условию (A), то при $m \geq 3$ ряд (3) сходится абсолютно и регулярно в основном квадрате.

Числа λ_n расположены в порядке возрастания их абсолютных величин, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)| \cdot |\varphi_k(s)|}{|\lambda_k|^m} &\leq \\ &\leq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|^{m-2}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \cdot \left| \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right|; \end{aligned}$$

в силу неравенства Коши и леммы 2 § 27

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)| \cdot |\varphi_k(s)|}{|\lambda_k|^m} &\leq \\
 &\leq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|^{m-2}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|^{m-2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \frac{A}{|\lambda_{n+1}|^{m-2}},
 \end{aligned}$$

и утверждение теоремы сразу вытекает из того обстоятельства, что $\lambda_{n+1} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Следствие. Если симметричное ядро непрерывно в целом, то интегрированные ядра, начиная с третьего, непрерывны в основном квадрате.

Действительно, в этом случае собственные функции $\varphi_n(x)$ непрерывны (см. § 16) на сегменте $[a, b]$, а ряд (3), как было только что показано, сходится равномерно.

Отметим, не приводя доказательства, что если ядро непрерывно в основном квадрате, а его характеристические числа положительны, то билинейный ряд этого ядра сходится равномерно. Это так называемая *теорема Мерсера*.

§ 31. Резольвента симметричного ядра

В формуле (5) § 28, дающей решение симметричного интегрального уравнения при правильных значениях параметра, заменим коэффициент f_n его выражением в виде интеграла

$$f_n = (f, \varphi_n) = \int_a^b f(s) \overline{\varphi_n(s)} ds;$$

упомянутая формула тогда примет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n - \lambda} f(s) ds. \quad (1)$$

Докажем, что в формуле (1) можно переставить порядок суммирования и интегрирования. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n - \lambda}. \quad (2)$$

Функции $\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}$, $n = 1, 2, \dots$ ортонормированы в основном квадрате. Далее, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda|^2} \quad (3)$$

сходится. Действительно, $\lambda_n \rightarrow \infty$, поэтому при n достаточно большом $|\lambda_n| > 2|\lambda|$; отсюда $|\lambda| < \frac{|\lambda_n|}{2}$, $|\lambda_n - \lambda| > \frac{|\lambda_n|}{2}$ и $\frac{1}{|\lambda_n - \lambda|} < \frac{2}{|\lambda_n|}$; теперь сходимость ряда (3) вы-

текает из доказанной ранее сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$ (см. § 27).

Из теоремы Риса — Фишера вытекает, что при любом правильном значении λ ряд (2) сходится в основном квадрате в среднем. Повторяя рассуждения, примененные при доказательстве теоремы 1 § 29, найдем, что ряд (2) можно интегрировать почленно по s , предварительно умножив его на любую квадратично суммируемую функцию от s . Но это и означает, что в ряде (1) можно переставить суммирование и интегрирование; такая перестановка дает нам новую форму решения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b f(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n - \lambda} ds.$$

Сравнив это с общей формулой (7) § 7, убедимся, что сумма ряда (2) есть резольвента симметричного ядра $K(x, s)$:

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n - \lambda}. \quad (4)$$

Из формулы (4), между прочим, вытекает, что резольвента симметричного ядра имеет только простые полюсы.

§ 32. Экстремальные свойства характеристических чисел и собственных функций

По теореме Гильберта — Шмидта, если функция $h(s)$ квадратично суммируема в промежутке (a, b) , то

$$\int_a^b K(x, s) h(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x).$$

Умножим это равенство скалярно на $h(x)$. Написанный ряд сходится в среднем, поэтому скалярное умножение можно произвести почленно:

$$(Kh, h) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k, h \right).$$

Вынося постоянный множитель $\frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}$ за знак скалярного произведения и используя свойство 1 скалярного произведения (§ 2), получаем

$$(Kh, h) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(h, \varphi_k)|^2}{\lambda_k}. \quad (1)$$

Пусть, как обычно, числа λ_k расположены в порядке возрастания их абсолютных величин, так что наименьшую абсолютную величину имеет число λ_1 . Тогда из формулы (1) вытекает

$$|(Kh, h)| \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \sum_{n=1}^{\infty} |(h, \varphi_n)|^2$$

или, если воспользоваться неравенством Бесселя,

$$|(Kh, h)| \leq \frac{\|h\|^2}{|\lambda_1|}.$$

Для нормированных функций $h(x)$ это неравенство принимает вид

$$|(Kh, h)| \leq \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad \|h\| = 1. \quad (2)$$

В неравенстве (2) знак равенства достигается при $h(x) = \varphi_1(x)$. Действительно, так как $\varphi_1(x)$ — собственная функция, отвечающая характеристическому числу λ_1 , то $\varphi_1(x) = \lambda_1 K\varphi_1$. Умножив это скалярно на $\varphi_1(x)$, получим

$$(K\varphi_1, \varphi_1) = \frac{\|\varphi_1\|^2}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Из сказанного вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. На множестве нормированных функций величина $|(Kh, h)|$ имеет максимум, равный $\frac{1}{|\lambda_1|}$. Этот максимум достигается при $h(x) = \varphi_1(x)$.

Рассмотрим теперь множество нормированных функций, ортогональных к первым $m-1$ собственным функциям:

$$\|h\| = 1, \quad (h, \varphi_1) = (h, \varphi_2) = \dots = (h, \varphi_{m-1}) = 0. \quad (3)$$

Тогда

$$Kh = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x).$$

Повторяя предшествующие рассуждения, убедимся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. На множестве функций, нормированных и ортогональных к первым $m-1$ собственным функциям ядра $K(x, s)$, величина $|(Kh, h)|$ имеет максимум, равный $\frac{1}{|\lambda_m|}$. Этот максимум достигается при $h(x) = \varphi_m(x)$.

На теоремах 1 и 2 основано применение методов вариационного исчисления к отысканию характеристических чисел и собственных функций симметричного ядра.

ГЛАВА IV

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 33. Интегральные уравнения теории потенциала в трехмерном пространстве

Метод интегральных уравнений оказывается весьма полезным при решении основных краевых задач теории гармонических функций. Применение этого метода опирается на некоторые факты теории потенциала, которые мы изложим без доказательства.

Пусть S — замкнутая поверхность. Буквой Q будем обозначать переменную точку поверхности S , буквой P — произвольную точку пространства. Через r , как всегда, будем обозначать расстояние между точками P и Q . Иногда нам придется рассматривать вектор $\vec{r} = \vec{PQ}$; мы всегда будем считать, что он направлен от точки P к точке Q . Внешние нормали к поверхности S в точках P и Q будем обозначать через n и ν соответственно.

Будем считать, что поверхность S удовлетворяет известным условиям Ляпунова. Напомним эти условия.

1. В каждой своей точке поверхность S имеет определенную нормаль.

2. Существует такое число $d > 0$, что сфера радиуса d с центром в любой точке P поверхности S вырезает из нее такую часть, которая не более чем в одной точке пересекается с каждой прямой, параллельной нормали в точке P .

3. Пусть P и Q — произвольные точки поверхности S , ϑ — угол между нормалью к поверхности в этих точках. Существуют такие постоянные $a > 0$ и $\alpha > 0$, что $\vartheta \leq ar^\alpha$. Число α назовем *показателем Ляпунова* поверхности S .

4. Телесный угол¹⁾, под которым из любой точки пространства видна любая (связная или несвязная, безразлично) часть поверхности S , ограничен. Аналитически это свойство выражается неравенством

$$\int_S \int \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right| dS_Q \leq C = \text{const.}$$

Пусть $\mu(Q)$ и $\sigma(Q)$ — непрерывные функции, определенные на S . Функция точки P

$$V(P) = \int_S \int \mu(Q) \frac{1}{r} dS_Q \quad (1)$$

называется *потенциалом простого слоя*, а функция

$$W(P) = \int_S \int \sigma(Q) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} dS_Q \quad (2)$$

— *потенциалом двойного слоя*. Функции $\mu(Q)$ и $\sigma(Q)$ называются *плотностями* соответствующих потенциалов.

Потенциал двойного слоя можно также представить в виде

$$W(P) = - \int_S \int \sigma(Q) \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} dS_Q. \quad (2a)$$

Обозначим через D_i и D_e области, заключенные внутри и вне S соответственно. Потенциалы простого и двойного слоев суть функции, гармонические как в D_i , так и в D_e . Для дальнейшего полезно заметить, что при стремлении точки P к бесконечности имеют место оценки

$$V(P) = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad W(P) = O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

где R — расстояние от точки P до начала координат.

Если в формуле (2) P означает точку поверхности S , то, как известно, интеграл в этой формуле сходится. Значение потенциала двойного слоя при $P \in S$ называется *прямым значением* этого потенциала.

¹⁾ Определение телесного угла дается в курсах математической физики.

Для потенциала двойного слоя с единичной плотностью справедлива так называемая *теорема Гаусса*

$$\int_S \int \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} ds = \begin{cases} -4\pi & \text{при } P \in D_i, \\ -2\pi & \text{при } P \in S, \\ 0 & \text{при } P \in D_e. \end{cases} \quad (3)$$

Для потенциала двойного слоя с произвольной непрерывной плотностью $\sigma(Q)$ справедлива *теорема о скачке потенциала двойного слоя*

$$\left. \begin{aligned} W_i(P_0) &= \overline{W(P_0)} - 2\pi\sigma(P_0), \\ W_e(P_0) &= \overline{W(P_0)} + 2\pi\sigma(P_0), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где P_0 — точка на поверхности S , а

$$\overline{W(P_0)} = - \int_S \int \sigma(Q) \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} dS_Q, \quad r = |QP_0| \quad (5)$$

— прямое значение потенциала двойного слоя; через $W_i(P_0)$ обозначено предельное значение потенциала $W(P)$, когда точка $P \rightarrow P_0$ изнутри S , через $W_e(P_0)$ — предельное значение потенциала, когда $P \rightarrow P_0$ извне S .

Разность предельных значений потенциала двойного слоя, как это следует из (4), равна

$$W_i(P_0) - W_e(P_0) = -4\pi\sigma(P_0). \quad (6)$$

Потенциал простого слоя непрерывен во всем пространстве.

Производная по нормали от потенциала простого слоя равна

$$\frac{\partial V(P)}{\partial n} = \int_S \mu(Q) \frac{\cos(n, r)}{r^2} dS. \quad (7)$$

Назовем значение интеграла (7), когда точка P лежит на поверхности S , *прямым значением нормальной производной потенциала простого слоя* и обозначим его $\frac{\partial V(P)}{\partial n}$.

Обозначим через $\frac{\partial V(P_0)}{\partial n_i}$ и $\frac{\partial V(P_0)}{\partial n_e}$ соответственно предельные значения нормальной производной от потенциала простого слоя, когда точка $P \rightarrow P_0$ изнутри или извне S .

Для нормальной производной потенциала простого слоя имеют место следующие равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V(P_0)}{\partial n_i} &= \frac{\partial V(P_0)}{\partial n} + 2\pi\mu(P_0), \\ \frac{\partial V(P_0)}{\partial n_e} &= \frac{\partial V(P_0)}{\partial n} - 2\pi\mu(P_0), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

выражающие теорему о скачке нормальной производной потенциала простого слоя. Скачок этой производной равен

$$\frac{\partial V(P_0)}{\partial n_i} - \frac{\partial V(P_0)}{\partial n_e} = 4\pi\mu(P_0). \quad (9)$$

Как известно, ядра интегралов (5) и (7) имеют слабую особенность, именно, если обе точки P и Q лежат на поверхности S , то

$$\left| \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} \right| \leq \frac{C}{r^{2-\alpha}}, \quad \left| \frac{\cos(r, n)}{r^2} \right| \leq \frac{C}{r^{2-\alpha}}, \quad (10)$$

где C — некоторая постоянная, α — показатель Ляпунова поверхности S .

Мы будем заниматься решением задач Дирихле и Неймана. Напомним постановку этих задач.

Пусть некоторая поверхность S ограничивает извне область D_i , изнутри — область D_e . Пусть на поверхности S заданы непрерывные функции $f(Q)$ и $\varphi(Q)$.

Внутренняя задача Дирихле: требуется найти функцию $W(P)$, гармоническую в области D_i и непрерывную в замкнутой области $D_i + S$ так, чтобы

$$W(Q) = f(Q), \quad Q \in S. \quad (11)$$

Аналогично *внешняя задача Дирихле* состоит в определении функции, гармонической в D_e , непрерывной в $D_e + S$ и удовлетворяющей тому же условию (11).

Внутренняя задача Неймана: требуется найти функцию $V(P)$, гармоническую в D_i , такую, чтобы ее нормальная производная при $Q \in S$ принимала на поверхности заданное значение $\varphi(Q)$:

$$\frac{\partial V(Q)}{\partial \nu} = \varphi(Q). \quad (12)$$

Аналогично *внешняя задача Неймана* состоит в определении гармонической в D_e функции $V(P)$, нормальная производная которой на поверхности S удовлетворяет условию (12).

Как доказывается в математической физике, из этих четырех задач три имеют единственное решение: обе задачи Дирихле и внешняя задача Неймана. Для разрешимости внутренней задачи Неймана необходимо, чтобы

$$\int_S \varphi(Q) dS = 0, \quad (13)$$

и если внутренняя задача оказывается разрешимой, то она имеет бесчисленное множество решений, отличающихся друг от друга на постоянное слагаемое.

Мы будем рассматривать задачи Дирихле и Неймана в предположении, что S есть поверхность Ляпунова.

Решение задач Дирихле будем искать в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью, а решение задач Неймана — в виде потенциала простого слоя, также с неизвестной плотностью. Тем самым мы удовлетворяем требованию гармоничности искомых решений.

Несколько изменим предыдущие обозначения: если точка P стремится изнутри или извне к некоторой точке на поверхности, то предельную точку будем в дальнейшем обозначать той же буквой P .

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле. Предельное условие (11) означает, что

$$W_i(P) = f(P), \quad P \in S.$$

По первой из формул (4) имеем

$$\overline{W(P)} - 2\pi\sigma(P) = f(P), \quad P \in S.$$

Заменяя прямое значение $\overline{W(P)}$ по формуле (5) и разделив обе части равенства на -2π , найдем, что искомая плотность $\sigma(P)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\sigma(P) + \frac{1}{2\pi} \int_S \int \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} \sigma(Q) dS_Q = -\frac{1}{2\pi} f(P). \quad (14)$$

Как это следует из оценки (10), ядро этого уравнения имеет слабую особенность.

Выведем интегральное уравнение внешней задачи Дирихле. Из предельного условия (11) следует, что $W_e(P) = f(P)$ или, если воспользоваться вторым равенством (4),

$$2\pi\sigma(P) + \overline{W}(\overline{P}) = f(P).$$

Разделив на 2π и воспользовавшись формулой (5), получим интегральное уравнение внешней задачи Дирихле:

$$\sigma(P) - \frac{1}{2\pi} \int_S \int \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} \sigma(Q) dS_Q = \frac{1}{2\pi} f(P). \quad (15)$$

Краевое условие внутренней задачи Неймана имеет вид $\frac{\partial V}{\partial n_i} = \varphi(P)$. Как уже было сказано, решение задачи Неймана ищется в виде потенциала простого слоя. Первая из предельных формул (8) позволяет записать краевое условие в виде

$$2\pi\mu(P) + \frac{\partial V}{\partial n} = \varphi(P).$$

Разделив это на 2π и заменив прямое значение нормальной производной по формуле (7), получим интегральное уравнение внутренней задачи Неймана

$$\mu(P) + \frac{1}{2\pi} \int_S \int \frac{\cos(r, n)}{r^2} \mu(Q) dS_Q = \frac{1}{2\pi} \varphi(P). \quad (16)$$

Подставляя во второе предельное уравнение (8) прямое значение потенциала простого слоя (7) и предельное условие

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} = \varphi(P),$$

получим интегральное уравнение внешней задачи Неймана

$$\mu(P) - \frac{1}{2\pi} \int_S \int \frac{\cos(r, n)}{r^2} \mu(Q) dS_Q = -\frac{1}{2\pi} \varphi(P). \quad (17)$$

Уравнения (14) и (15) имеют одно и то же ядро

$$K(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r, \nu)}{r^2},$$

но отличаются значениями параметра λ , соответственно равными -1 и $+1$. Точно также имеют одно и то же ядро

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r, n)}{r^2},$$

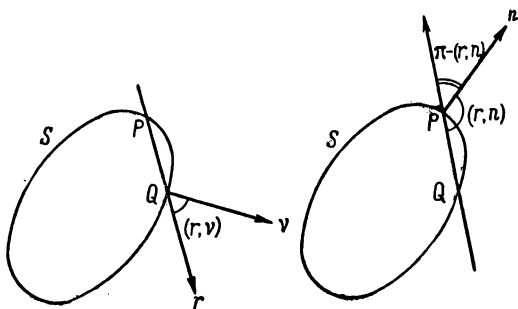
но различаются значениями параметра, уравнения (16) и (17).

Докажем, что уравнения (14) и (17), а также уравнения (15) и (16) — сопряженные между собой.

Так как ядро $K(P, Q)$ вещественное, то

$$K^*(P, Q) = K(Q, P),$$

т. е. в сопряженном ядре точки P и Q переставлены местами, а тогда при построении сопряженного ядра надо нормаль к поверхности строить в точке P и направление r



Черт. 7

брать от точки Q к точке P (черт. 7). При этом угол (r, v) заменится на $\pi - (r, n)$, и мы получим

$$K^*(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\pi - (r, n))}{r^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r, n)}{r^2},$$

что и требовалось доказать. Таким образом, интегральные уравнения внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана — сопряженные между собой; точно также сопряженными являются интегральные уравнения внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана.

В заключение параграфа докажем, что если какое-либо из уравнений (14) — (17) разрешимо, то его решения

непрерывны. Для примера рассмотрим уравнение (14). Его ядро можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} = \frac{r^{-\alpha/2} \cos(r, \nu)}{r^{2-\alpha/2}}.$$

Для поверхности Ляпунова S имеет место оценка $|\cos(r, \nu)| \leq Cr^\alpha$, поэтому произведение $r^{-\alpha/2} \cos(r, \nu) \rightarrow 0$ при $P \rightarrow Q$; в то же время это произведение очевидно непрерывно при $P \neq Q$. Таким образом, ядро уравнения (14) представлено в виде отношения непрерывной функции и степени r с показателем, меньшим 2. Имея в виду, что свободный член уравнения (14) непрерывен по самой постановке задачи Дирихле, заключаем на основании теоремы 4 § 17, что любое решение (если оно существует) интегрального уравнения (14) непрерывно. Аналогично доказывается непрерывность решений (в предположении, что они существуют) уравнений (15) — (17).

§ 34. Решение краевых задач теории потенциала

В предыдущем параграфе мы вывели интегральные уравнения краевых задач теории потенциала. В силу оценок (10) § 33 эти интегральные уравнения являются уравнениями со слабой особенностью и, следовательно, к ним применима теория Фредгольма.

Рассмотрим интегральное уравнение внутренней задачи Дирихле [уравнение (14) § 33]

$$\sigma(P) + \frac{1}{2\pi} \int_S \int \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} \sigma(Q) dS_Q = -\frac{1}{2\pi} f(P) \quad (1)$$

и сопряженное с ним уравнение (17) § 33 внешней задачи Неймана

$$\mu(P) - \frac{1}{2\pi} \int_S \int \frac{\cos(r, n)}{r^2} \mu(Q) dS_Q = -\frac{1}{2\pi} \varphi(P); \quad (2)$$

докажем, что они разрешимы при любых свободных членах.

В силу их сопряженности доказательство, очевидно, достаточно провести для какого-нибудь одного из них — докажем разрешимость уравнения внешней задачи Неймана,

Напишем соответствующее уравнению (2) однородное уравнение

$$\mu_0(P) - \frac{1}{2\pi} \int_S \int \frac{\cos(r, n)}{r^2} \mu_0(Q) dS_Q = 0 \quad (3)$$

и пусть $\mu_0(P)$ какое-либо его решение. По теореме 4 § 17 функция $\mu_0(P)$ непрерывна на поверхности S (см. конец § 33). Введем в рассмотрение потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(P)$:

$$V_0(P) = \int_S \int \mu_0(Q) \frac{dS_Q}{r}, \quad (4)$$

тогда определяемое формулами (7) и (8) § 33 предельное значение нормальной производной $\frac{\partial V_0}{\partial n_e}$ равно нулю, в силу уравнения (3):

$$\frac{\partial V_0}{\partial n_e} = -2\pi\mu_0(P) + \int_S \int \frac{\cos(r, n)}{r^2} \mu_0(Q) dS_Q = 0.$$

Функция $V_0(P)$ гармонична в D_e ; по теореме единственности внешней задачи Неймана $V_0(P) \equiv 0$; $P \in D_e$. Устремляя точку P к поверхности S , находим, что $V_0(P) \equiv 0$, $P \in S$.

Пусть теперь $P \in D_i$. Функция $V_0(P)$ гармонична и в области D_i ; на границе S этой области она обращается в нуль (напомним, что потенциал простого слоя непрерывен на поверхности S). По теореме о единственности решения внутренней задачи Дирихле $V_0(P) \equiv 0$, $P \in D_i$. Но тогда $\frac{\partial V_0}{\partial n_i} \equiv 0$, и на основании формулы (9) § 33

$$\mu_0(P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V_0}{\partial n_i} - \frac{\partial V_0}{\partial n_e} \right) = 0.$$

Таким образом, однородное уравнение (3) имеет только тривиальное решение; следовательно, значение параметра $\lambda = -1$ правильное и уравнение (2) всегда разрешимо. Это значит, что если S — поверхность Ляпунова и заданные значения нормальной производной решения на поверхности S непрерывны, то внешняя задача Неймана всегда имеет решение, и это решение можно представить в виде потенциала простого слоя.

Уравнение (1) — сопряженное с уравнением (2), а в таком случае оно также разрешимо при любой правой части. Поэтому, если S — поверхность Ляпунова, то внутренняя задача Дирихле всегда имеет решение и решение этой задачи может быть представлено в виде потенциала двойного слоя.

Перейдем к рассмотрению сопряженных между собой уравнений внешней задачи Дирихле [уравнение (15) § 33] и внутренней задачи Неймана [уравнение (16) § 33]. Докажем, что для этих уравнений значение параметра $\lambda = 1$ является характеристическим. Рассмотрим, соответствующее уравнению (15) § 33, однородное уравнение

$$\sigma_0(P) - \frac{1}{2\pi} \int_S \int \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} \sigma_0(Q) dS_Q = 0. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что это уравнение имеет собственную функцию $\sigma_0(P) \equiv 1$, так как по теореме Гаусса

$$\int_S \int \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} dS_Q = - \int_S \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} dS_Q = 2\pi, \quad P \in S.$$

Таким образом, однородное уравнение (5) имеет нетривиальное решение, $\lambda = 1$ есть характеристическое число ядра $K(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r, \nu)}{r^2}$ и уравнения (15) и (16) § 33 разрешимы не всегда.

В силу теоремы 3 Фредгольма однородное уравнение

$$\mu(P) + \frac{1}{2\pi} \int_S \int \frac{\cos(r, n)}{r^2} \mu(Q) dS_Q = 0 \quad (6)$$

имеет собственную функцию, которую мы обозначим через $\mu_0(P)$. Докажем, что уравнение (6) не имеет собственных функций, линейно независимых с $\mu_0(P)$.

Пусть $\mu_1(P)$ — какая-нибудь собственная функция уравнения (6); достаточно доказать, что $\mu_1(P)$ только постоянным множителем отличается от $\mu_0(P)$. Запишем, что $\mu_0(P)$ и $\mu_1(P)$ суть собственные функции уравнения (6):

$$\mu_k(P) + \frac{1}{2\pi} \int_S \int \frac{\cos(r, n)}{r^2} \mu_k(Q) dS_Q = 0; \quad k = 0, 1. \quad (7)$$

Рассмотрим потенциалы простого слоя

$$V_k(P) = \int_S \int \mu_k(Q) \frac{dS_Q}{r}; \quad k=0, 1; \quad P \in D_i.$$

Предельные значения производных по нормали от этих потенциалов определяются первым из равенств (8) § 33:

$$\frac{\partial V_k}{\partial n_i} = 2\pi\mu_k(P) + \int_S \int \frac{\cos(r, n)}{r^3} \mu_k(Q) dS_Q,$$

что равно нулю в силу тождеств (7). Потенциалы $V_k(P)$ гармоничны в D_i ; по теореме единственности внутренней задачи Неймана в этой области функции $V_k(P)$ суть постоянные:

$$V_k(P) = C_k; \quad k=0, 1; \quad P \in D_i.$$

Покажем, что $C_k \neq 0$. Предположим противное. Тогда $V_k(P) \equiv 0$, $P \in D_i$; в силу непрерывности потенциала $V_k(P) \equiv 0$ на поверхности S .

В области D_e потенциал $V_k(P)$ гармоничен и, так как $V_k(P) \equiv 0$ на S , то $V_k(P) \equiv 0$ в D_e , в силу теоремы единственности внешней задачи Дирихле. Но тогда $\frac{\partial V_k}{\partial n_e} \equiv 0$ и по равенству (9) § 33

$$\mu_k(P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V_k}{\partial n_i} - \frac{\partial V_k}{\partial n_e} \right) \equiv 0.$$

Мы пришли к противоречию с условием, что $\mu_k(P)$ собственная функция. Тем самым доказано, что $C_k \neq 0$, $k=1, 2$.

Составим функцию

$$\mu_2(P) = C_1\mu_0(P) - C_0\mu_1(P)$$

и соответствующий ей потенциал простого слоя

$$V_2(P) = \int_S \int \mu_2(Q) \frac{dS}{r} = C_1V_0(P) - C_0V_1(P).$$

Очевидно, $V_2(P) \equiv 0$, $P \in D_i$. Повторяя предшествующие рассуждения, найдем, что во всем пространстве $V_2(P) \equiv 0$; отсюда, как и выше, следует, что $\mu_2(P) \equiv 0$, или

$$\mu_1(P) = \frac{C_1}{C_0} \mu_0(P),$$

что и требовалось доказать.

По теореме 4 Фредгольма, для разрешимости уравнения (16) § 33 — интегрального уравнения внутренней задачи Неймана, — необходимо и достаточно, чтобы свободный член уравнения, $\frac{1}{2\pi} \varphi(P)$, был ортогонален ко всем решениям сопряженного однородного уравнения (5). Но уравнение (5), как мы доказали, имеет одно линейно независимое решение $\sigma_0(P) \equiv 1$; необходимые и достаточные условия сводятся к единственному равенству

$$\int_S \int \varphi(P) dS = 0. \quad (8)$$

Мы доказали тем самым достаточность необходимого условия (13) § 29 разрешимости внутренней задачи Неймана. Итак, если условие (8) выполнено, то уравнение (16) § 33 разрешимо, и решение внутренней задачи Неймана можно представить в виде потенциала простого слоя с плотностью $\mu(Q)$.

§ 35. Решение внешней задачи Дирихле

Мы уже видели, что интегральное уравнение внешней задачи Дирихле [уравнение (15) § 33], вообще говоря, неразрешимо. Это означает, что получить решение внешней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя в общем случае невозможно. Это можно было предвидеть заранее, так как потенциал двойного слоя убывает на бесконечности как R^{-2} (R — расстояние от начала координат до точки P), тогда как произвольная гармоническая функция убывает на бесконечности как R^{-1} . Поэтому будем искать решение внешней задачи Дирихле в виде суммы потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью $\sigma(Q)$ и гармонической функции

$$\frac{1}{R} \int_S \int \sigma(Q) dS_Q,$$

убывающей на бесконечности как R^{-1} ; начало координат мы помещаем внутри поверхности S . Таким образом, иско-

мая функция имеет вид

$$W(P) = \int_S \int \sigma(Q) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} dS_Q + \frac{1}{R} \int_S \int \sigma(Q) dS_Q; \quad P \in D_e. \quad (1)$$

На поверхности S должно выполняться краевое условие внешней задачи Дирихле

$$W_e(P) = f(P), \quad (2)$$

и предельная формула (4) § 33 приводит нас к уравнению для неизвестной плотности

$$\sigma(P) - \frac{1}{2\pi} \int_S \int \left[\frac{\cos(r, \nu)}{r^2} - \frac{1}{R} \right] \sigma(Q) dS_Q = \frac{1}{2\pi} f(P). \quad (3)$$

Ядро этого интегрального уравнения состоит из двух слагаемых: первое имеет слабую особенность, второе слагаемое — непрерывная функция. Таким образом, уравнение (3) есть уравнение со слабой особенностью; в соответствии с теорией Фредгольма для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы соответствующее ему однородное уравнение имело только тривиальное решение.

Исследуем однородное уравнение

$$\sigma_0(P) - \frac{1}{2\pi} \int_S \int \left[\frac{\cos(r, \nu)}{r^2} - \frac{1}{R} \right] \sigma_0(Q) dS_Q = 0. \quad (4)$$

Пусть $\sigma_0(P)$ какое-либо его решение. Левую часть уравнения (4) можно рассматривать как разделенное на 2π предельное значение гармонической функции

$$W_0(P) = \int_S \int \sigma_0(Q) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} dS_Q + \frac{1}{R} \int_S \int \sigma_0(Q) dS_Q$$

на поверхности S . Отсюда следует, что $W_0(P)$ на поверхности S равна нулю; по теореме о единственности решения внешней задачи Дирихле $W_0(P) \equiv 0$, или

$$\int_S \int \sigma_0(Q) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} dS_Q + \frac{1}{R} \int_S \int \sigma_0(Q) dS_Q \equiv 0, \quad P \in D_e. \quad (5)$$

Умножая обе части равенства (5) на R , получим

$$R \int_S \int \sigma_0(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} dS_Q + \int_S \int \sigma_0(Q) dS_Q \equiv 0, \quad P \in D_e.$$

Первое слагаемое при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю, следовательно,

$$\int_S \int \sigma_0(Q) dS_Q = 0 \quad (6)$$

и уравнение (4) сводится к уравнению (5) § 34. Будучи решением этого уравнения, $\sigma_0(Q)$ есть некоторая постоянная; $\sigma_0(P) \equiv C_0$. Подставив это в (6), найдем, что $C_0 = 0$ и, окончательно, $\sigma_0(P) \equiv 0$.

Таким образом, однородное уравнение (4) имеет только тривиальное решение. Но тогда уравнение (3) всегда разрешимо и, следовательно, всегда разрешима внешняя задача Дирихле, решение которой может быть построено в форме (2).

§ 36. Уравнения теории потенциала в многомерных пространствах

В теории уравнений в частных производных рассматриваются гармонические функции любого числа переменных. Определение и основные свойства гармонических функций, известные для случая трех переменных, распространяются на случай многих переменных с одним лишь изменением: от функции $u(P)$, гармонической в бесконечной области, расположенной вне некоторой поверхности, требуется, чтобы на бесконечности она убывала как $\frac{1}{R^{m-2}}$, где m — число измерений пространства и R — расстояние от точки P до начала координат. В частности, функция двух переменных, гармоническая вне некоторого контура, должна быть только ограничена на бесконечности.

Понятия и методы теории потенциала, развитые в §§ 33—35, без изменений переносятся на случай, когда число измерений пространства $m > 3$. Пусть S — замкнутая $m-1$ -мерная поверхность, удовлетворяющая условиям Ляпунова, P — произвольная точка m -мерного пространства (она может

лежать и на поверхности S), Q — точка поверхности S , r — расстояние между точками P и Q , ν — внешняя нормаль к S в точке Q . Интегралы

$$V(P) = \int_S \mu(Q) \frac{dS_Q}{r^{m-2}} \quad (1)$$

и

$$W(P) = \int_S \sigma(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} dS_Q = - \int_S \sigma(Q) \frac{\cos(r, \nu)}{r^{m-1}} dS_Q \quad (2)$$

называются потенциалами, соответственно, простого и двойного слоя; их плотности $\mu(Q)$ и $\sigma(Q)$ будем считать непрерывными. При $P \neq Q$ функция $\frac{1}{r^{m-2}}$ удовлетворяет уравнению Лапласа по координатам точки P ; отсюда следует, что потенциалы простого и двойного слоя гармоничны как внутри, так и вне S , причем потенциал простого слоя убывает на бесконечности как $\frac{1}{R^{m-2}}$, а потенциал двойного слоя — как $\frac{1}{R^{m-1}}$. Справедливы теоремы, аналогичные теоремам § 33, с той разницей, что входящая в формулы (4) и (8) § 33 величина 2π заменяется половиной площади поверхности единичной сферы; как известно, эта площадь равна $\frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$, где Γ — эйлеров интеграл второго рода; в соответствии с этим в формулах (6) и (9) § 33 следует заменить 4π на $\frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$. Если n — внешняя нормаль к S , проходящая через точку P , то аналогично формуле (7) § 33 имеем

$$\frac{\partial V(P)}{\partial n} = \int_S \mu(Q) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}} dS_Q.$$

Если решения задач Дирихле и Неймана искать в виде потенциала соответственно двойного и простого слоя, то

мы получим интегральные уравнения

$$\sigma(P) \pm \frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}} \int_S \sigma(Q) \frac{\cos(r, \nu)}{r^{m-1}} dS_Q = \mp \frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}} f(P), \quad (\text{Д})$$

$$\mu(P) \pm \frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}} \int_S \mu(Q) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}} dS_Q = \pm \frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}} \varphi(P), \quad (\text{Н})$$

где $f(P)$ — заданное на поверхности S значение искомой гармонической функции в задаче Дирихле, а $\varphi(P)$ — также заданное на S значение нормальной производной искомой гармонической функции в задаче Неймана; верхние знаки соответствуют внутренним задачам, нижние — внешним.

Анализ уравнений (Д) и (Н) проводится так же, как и в § 34, и приводит в точности к тем же результатам. Именно, внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана всегда разрешимы; для разрешимости внутренней задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_S \varphi(P) dS_P = 0.$$

Интегральное уравнение внешней задачи Дирихле в общем случае неразрешимо; как и в случае трехмерного пространства, это связано с тем, что не всякую гармоническую вне S функцию можно представить в виде потенциала двойного слоя, так как последний слишком быстро убывает на бесконечности. Внешнюю задачу Дирихле можно решить, отыскивая решение в виде

$$\int_S \sigma(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} dS_Q + \frac{1}{R^{m-2}} \int_S \sigma(Q) dS_Q,$$

где R — расстояние от точки P до некоторой фиксированной точки внутри S . Такое представление приводит к интегральному уравнению

$$\sigma(P) - \frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}} \int_S \sigma(Q) \left[\frac{\cos(r, \nu)}{r^{m-1}} - \frac{1}{R^{m-2}} \right] dS_Q = \frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}} f(P),$$

которое всегда разрешимо,

§ 37. Уравнения теории потенциала на плоскости

Случай $m = 2$ представляет в теории потенциала некоторые особенности. При $m = 2$ функция $\frac{1}{r^{m-2}}$ обращается в единицу, потенциалы простого и двойного слоя делаются постоянными и для них становятся неверными предельные теоремы, которые в случае трехмерного пространства выражались формулами (4) и (8) § 33. В связи с этим оказывается необходимым изменить определения потенциалов для интересующего нас случая $m = 2$. Роль функции $\frac{1}{r^{m-2}}$ — так называемого *сингулярного решения уравнения*

Лапласа — играет в данном случае функция $\ln \frac{1}{r}$, которая, как легко проверить, при $m = 2$ удовлетворяет уравнению Лапласа, если только $P \neq Q$. Соответственно этому потенциалы простого и двойного слоя на плоскости определяются формулами

$$V(P) = \int_L \mu(Q) \ln \frac{1}{r} ds_Q, \quad (1)$$

$$W(P) = \int_L \sigma(Q) \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial \nu} ds_Q = - \int_L \sigma(Q) \frac{\cos(r, \nu)}{r} ds_Q. \quad (2)$$

Здесь L — контур, о котором мы предположим, что он замкнут и удовлетворяет условиям Ляпунова, ν — нормаль к контуру L в точке P , ds_Q — элемент длины контура L . Потенциалы (1) и (2) принято называть *логарифмическими*, в отличие от рассмотренных в § 33 *ньютоновских* потенциалов. Логарифмический потенциал двойного слоя гармоничен как внутри, так и вне L ; на бесконечности он обращается в нуль. Логарифмический потенциал простого слоя гармоничен внутри L ; существенное различие со случаем $m > 2$ заключается в том, что этот потенциал, вообще говоря, негармоничен вне L , так как функция, гармоническая в бесконечной области на плоскости, должна быть на бесконечности ограниченной, а потенциал простого слоя в общем случае растет на бесконечности как $\ln R$.

Для потенциалов (1) и (2) справедливы теоремы, аналогичные теоремам § 33: потенциал простого слоя непрерывен на всей плоскости (кроме, может быть, бесконечно удаленной точки); имеют место предельные соотношения для потенциала двойного слоя

$$\left. \begin{aligned} W_i(P_0) &= \overline{W(P_0)} - \pi\sigma(P_0), \\ W_e(P_0) &= \overline{W(P_0)} + \pi\sigma(P_0) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и для нормальной производной потенциала простого слоя

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V(P_0)}{\partial n_i} &= \frac{\partial V(P_0)}{\partial n} + \pi\mu(P_0); \\ \frac{\partial V(P_0)}{\partial n_e} &= \frac{\partial V(P_0)}{\partial n} - \pi\mu(P_0); \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

здесь n — внешняя нормаль к контуру L в точке P_0 . Имеет место теорема Гаусса в следующей форме:

$$\int_L \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial \nu} ds_Q = - \int_L \frac{\cos(r, \nu)}{r} ds_Q = \begin{cases} -2\pi & \text{внутри } L, \\ -\pi & \text{на } L, \\ 0 & \text{вне } L. \end{cases} \quad (5)$$

Задачи Дирихле и Неймана ставятся как обычно; мы сохраняем также старые обозначения $f(P)$ и $\varphi(P)$ для данных в этих задачах функций. Важно отметить, что внешняя задача Неймана на плоскости отличается некоторыми особенностями. Прежде всего, ее решение неоднозначно; теорема единственности для этой задачи состоит в том, что два ее решения могут отличаться только на произвольное постоянное слагаемое. Очевидно и обратное: две функции, гармонические вне L и различающиеся на постоянное слагаемое, решают одну и ту же внешнюю задачу Неймана.

Другая особенность внешней задачи Неймана на плоскости определяется следующей леммой.

Лемма 1. *Для того, чтобы внешняя задача Неймана на плоскости имела решение, необходимо, чтобы*

$$\int_L \varphi(P) ds_P = 0. \quad (6)$$

Пусть функция $V(P)$ гармонична вне L , и пусть на L

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \varphi(P).$$

Обозначим декартовы координаты точки P через x и y и положим $z = x + iy$. Пусть $F(z)$ — аналитическая функция, вещественная часть которой равна $V(P)$. Докажем прежде всего, что функция $F(z)$ однозначна и на бесконечности ограничена. Производная

$$F'(z) = \frac{\partial V}{\partial x} - i \frac{\partial V}{\partial y}$$

однозначна вне L ; в окрестности бесконечно удаленной точки она разлагается в ряд Лорана

$$F'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n,$$

отсюда

$$F(z) = a_{-1} \ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n; \quad (*)$$

постоянная a_{-1} необходимо вещественна — в противном случае функция $V(P) = \operatorname{Re} \{F(Z)\}$ была бы неоднозначной. Положим $z = Re^{i\theta}$, $b_n = \alpha_n + i\beta_n$. Тогда в окрестности бесконечно удаленной точки

$$V(P) = a_{-1} \ln R + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) R^n. \quad (**)$$

Так как на бесконечности гармоническая вне L функция $V(P)$ ограничена, то необходимо $a_{-1} = 0$ и $\alpha_n = \beta_n = 0$, $n > 0$. Докажем это.

Прежде всего докажем, что в ряде (*) отсутствуют положительные степени z . Допустим противное. Может случиться, что таких степеней будет только конечное число; пусть тогда k — наибольший из положительных показателей при z в ряде (*). Коэффициент $b_k \neq 0$, и можно выбрать такое θ , чтобы $\alpha_k \cos k\theta - \beta_k \sin k\theta \neq 0$. Зафиксировав θ таким образом, возьмем R столь большим, чтобы в ряде (**) слагаемое $(\alpha_k \cos k\theta - \beta_k \sin k\theta) R^k$ по крайней мере вдвое

превосходило по абсолютной величине сумму остальных слагаемых; тогда при выбранном нами Θ

$$|V| \geq \frac{1}{2} |\alpha_k \cos k\Theta - \beta_k \sin k\Theta| R^k \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty,$$

а это невозможно, раз функция V ограничена. Остается допустить, что ряд (*) содержит бесконечно много положительных степеней z . В этом случае точка $z = \infty$ — существенно особая для ряда (*), и можно указать такую последовательность $z_m \rightarrow \infty$, что $F(z_m) - a_{-1} \ln z_m$ имеет пределом любое наперед заданное число. Пусть $|V| < M$ при достаточно больших z . Выберем последовательность z_m так, чтобы

$$F(z_m) - a_{-1} \ln z_m \rightarrow \begin{cases} 2M, & \text{если } a_{-1} \geq 0, \\ -2M, & \text{если } a_{-1} < 0. \end{cases}$$

При m достаточно больших в первом случае

$$V(z_m) > a_{-1} \ln |z_m| + M \geq M,$$

а во втором случае

$$V(z_m) < a_{-1} \ln |z_m| - M < -M;$$

и то, и другое невозможно. Итак, необходимо $b_n = 0$, или $\alpha_n = \beta_n = 0$, $n > 0$. Но тогда из ограниченности функции V на бесконечности необходимо следует, что $a_{-1} = 0$. Теперь

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^0 b_n z^n,$$

откуда и вытекает однозначность и ограниченность на бесконечности функции $F(z)$. Раз эта функция однозначна, то

$$\int_L \operatorname{Im} \{F'(z) dz\} = \operatorname{Im} \int_L F'(z) dz = 0.$$

Но

$$\operatorname{Im} \{F'(z) dz\} = \frac{\partial V}{\partial x} dy - \frac{\partial V}{\partial y} dx = \frac{\partial V}{\partial n} ds_P = \varphi(P) ds_P,$$

и необходимость условия (6) доказана.

Как и в общем случае, будем искать решение задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя (2), а решение

задачи Неймана — в виде потенциала простого слоя (1), и это приведет нас к интегральным уравнениям

$$\sigma(P) \pm \frac{1}{\pi} \int_L \sigma(Q) \frac{\cos(r, \nu)}{r} ds_Q = \mp \frac{1}{\pi} f(P) \quad (Д)$$

для задачи Дирихле и

$$\mu(P) \pm \frac{1}{\pi} \int_L \mu(Q) \frac{\cos(r, n)}{r} ds_Q = \pm \frac{1}{\pi} \varphi(P) \quad (Н)$$

для задачи Неймана; верхние знаки соответствуют внутренним задачам, нижние — внешним. По-прежнему уравнение внутренней задачи Дирихле сопряжено с уравнением внешней задачи Неймана, а уравнение внешней задачи Дирихле — с уравнением внутренней задачи Неймана. Отметим только ту особенность наших уравнений, что их ядра ограничены, если показатель Ляпунова контура L равен единице; нетрудно доказать, что эти ядра непрерывны, если контур имеет непрерывную кривизну.

Исследование интегральных уравнений теории потенциала на плоскости мы проведем, опираясь на следующую лемму.

Лемма 2. Если интегральное уравнение внешней задачи Неймана

$$\mu(P) - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(Q) \frac{\cos(r, n)}{r} ds_Q = -\frac{1}{\pi} \varphi(P) \quad (7)$$

разрешимо, а функция $\varphi(P)$ удовлетворяет условию (6), то потенциал простого слоя (1) дает решение внешней задачи Неймана.

Пусть уравнение (7) разрешимо. Взяв его решение за плотность потенциала (1), мы получим функцию, удовлетворяющую краевому условию внешней задачи Неймана и гармоническую вне L всюду, кроме, может быть, бесконечно удаленной точки, где потенциал может оказаться неограниченным. Остается доказать, что если условие (6) выполнено, то потенциал (1) ограничен на бесконечности.

Обе части уравнения (7) умножим на ds_P и проинтегрируем по L . Учтя условие (6), получим

$$\int_L \mu(P) ds_P - \frac{1}{\pi} \int_L \int_L \mu(Q) \frac{\cos(r, n)}{r} ds_Q ds_P = 0. \quad (8)$$

В двойном интеграле переставим обозначения P и Q . Тогда направление вектора r изменится на противоположное, $\cos(r, n)$ перейдет в $-\cos(r, \nu)$, и двойной интеграл примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_L \int_L \mu(P) \frac{\cos(r, \nu)}{r} ds_Q ds_P = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_L \mu(P) ds_P \int_L \frac{\cos(r, \nu)}{r} ds_Q = -\int_L \mu(P) ds_P. \end{aligned}$$

Теперь из равенства (8) следует

$$\int_L \mu(P) ds_P = 0. \quad (9)$$

Заменим в равенстве (9) обозначение P на Q , умножим это равенство на $\ln R$, где R — расстояние от точки P до начала координат, и сложим с равенством (1). В результате получим

$$V(P) = \int_L \mu(Q) \ln \frac{R}{r} ds_Q;$$

при $R \rightarrow \infty$ последнее выражение ограничено (оно даже стремится к нулю).

Последующий анализ интегральных уравнений теории потенциала проводится в основных чертах так же, как и в § 34; вкратце наметим этот анализ.

Прежде всего докажем, что интегральное уравнение (7) внешней задачи Неймана разрешимо. В соответствии с альтернативой Фредгольма рассмотрим однородное уравнение

$$\mu_0(P) - \frac{1}{\pi} \int_L \mu_0(Q) \frac{\cos(r, n)}{r} ds_Q = 0; \quad (10)$$

пусть $\mu_0(Q)$ его решение. Свободный член уравнения (10), равный нулю, очевидно удовлетворяет условию (6); из леммы 2 вытекает, что потенциал

$$V_0(P) = \int_L \mu_0(Q) \ln \frac{1}{r} ds_Q$$

решает однородную внешнюю задачу Неймана. По теореме единственности, решение этой задачи есть постоянная,

поэтому

$$V_0(P) = \int_L \mu_0(Q) \ln \frac{1}{r} ds_Q = C = \text{const}, \quad P \text{ вне } L.$$

По непрерывности потенциал $V_0(P)$ равен C и на контуре L ; по теореме единственности внутренней задачи Дирихле заключаем, что $V_0(P) = C$ и внутри L . Но тогда

$$\frac{\partial V_0(P)}{\partial n_i} = \frac{\partial V_0(P)}{\partial n_e} = 0,$$

и из формул (4) следует, что

$$\mu_0(P) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial V_0(P)}{\partial n_i} - \frac{\partial V_0(P)}{\partial n_e} \right) = 0.$$

Раз однородное уравнение (10) имеет только тривиальное решение, то неоднородное уравнение (7) всегда разрешимо. Из леммы 2 вытекает теперь, что *условие (6) не только необходимо, но и достаточно для разрешимости внешней задачи Неймана на плоскости.*

Одновременно с уравнением (7) всегда разрешимо и сопряженное с ним интегральное уравнение внутренней задачи Дирихле; отсюда следует, что внутренняя задача Дирихле на плоскости всегда разрешима.

Исследование уравнений внутренней задачи Неймана и внешней задачи Дирихле проводится буквально так же, как и в случае трехмерного пространства, и нет нужды здесь это исследование повторять; мы приведем только его результаты: если условие (6) выполнено, то интегральное уравнение внутренней задачи Неймана разрешимо; *условие (6), следовательно, необходимо и достаточно для разрешимости внутренней задачи Неймана*; однородное интегральное уравнение внешней задачи Дирихле

$$\sigma_0(P) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(r, \nu)}{r} \sigma_0(Q) ds_Q = 0 \quad (11)$$

имеет нетривиальным решением только постоянную.

Решение внешней задачи Дирихле на плоскости можно построить, отыскивая это решение в виде

$$W(P) = \int_L \sigma(Q) \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial \nu} ds_Q + \int_L \sigma(Q) ds_Q. \quad (12)$$

Для плотности $\sigma(P)$ получается интегральное уравнение

$$\sigma(P) - \frac{1}{\pi} \int_L \left[\frac{\cos(r, \nu)}{r} - 1 \right] \sigma(Q) ds_Q = \frac{1}{\pi} f(P); \quad (13)$$

докажем, что это уравнение разрешимо.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\sigma_0(P) - \frac{1}{\pi} \int_L \left[\frac{\cos(r, \nu)}{r} - 1 \right] \sigma_0(Q) ds_Q = 0. \quad (14)$$

Если $\sigma_0(P)$ — его решение, то функция

$$W_0(P) = \int_L \sigma_0(Q) \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial \nu} ds_Q + \int_L \sigma_0(Q) ds_Q$$

гармонична вне L и равна нулю на L ; по теореме единственности внешней задачи Дирихле $W_0(P) \equiv 0$. Устремим точку P в бесконечность, тогда первое слагаемое в $W_0(P)$ пропадет, и мы получим

$$\int_L \sigma_0(Q) ds_Q = 0. \quad (15)$$

Но тогда уравнения (14) и (11) тождественны, и потому необходимо $\sigma_0(P) = C = \text{const}$, подставив это в (15), найдем, что $\sigma_0(P) \equiv 0$.

Итак, уравнение (14) имеет только тривиальное решение, а тогда соответствующее неоднородное уравнение (13) всегда разрешимо, в силу альтернативы Фредгольма. Подставив решение этого уравнения в формулу (12), получим решение внешней задачи Дирихле на плоскости.

§ 38. Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения

Настоящий параграф — вспомогательный. Его результаты будут использованы в следующем параграфе при решении задачи о собственных числах и собственных функциях обыкновенного дифференциального оператора.

Будем рассматривать обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x) u. \quad (1)$$

Относительно его коэффициентов примем, что $p(x)$, $p'(x)$ и $q(x)$ непрерывны на некотором сегменте $[a, b]$ и что на этом сегменте

$$p(x) \geq p_0 = \text{const} > 0, \quad q(x) \geq 0. \quad (2)$$

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на сегменте $[a, b]$. Поставим задачу: найти функцию $u(x)$, непрерывную на сегменте $[a, b]$ вместе со своими первыми двумя производными и удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$Lu = -f(x) \quad (3)$$

и краевым условиям

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (4)$$

Докажем прежде всего, что поставленная нами краевая задача имеет не более одного решения. Действительно, пусть $u(x)$ и $v(x)$ — два решения этой задачи. Их разность $w(x) = u(x) - v(x)$ удовлетворяет тождеству

$$Lw = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dw}{dx} \right] - q(x) w = 0 \quad (5)$$

и краевым условиям

$$w(a) = w(b) = 0. \quad (6)$$

Обе части тождества (5) умножим скалярно на w , иначе говоря, умножим на $\overline{w(x)}$ и проинтегрируем в пределах от a до b :

$$\int_a^b \overline{w(x)} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dw}{dx} \right] dx - \int_a^b q(x) |w(x)|^2 dx = 0. \quad (7)$$

Первый интеграл возьмем по частям. Приняв во внимание условия (6), получим

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{w(x)} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dw}{dx} \right] dx &= - \int_a^b p(x) \left| \frac{dw}{dx} \right|^2 dx + \\ &+ p(x) \overline{w(x)} \frac{dw}{dx} \Big|_a^b = - \int_a^b p(x) \left| \frac{dw}{dx} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Теперь тождество (7) принимает вид

$$\int_a^b p(x) \left| \frac{dw}{dx} \right|^2 dx + \int_a^b q(x) |w|^2 dx = 0.$$

Так как $p(x)$ и $q(x)$ неотрицательны, то каждое из слагаемых равно нулю; в частности

$$\int_a^b p(x) \left| \frac{dw}{dx} \right|^2 dx = 0,$$

но $p(x)$ строго положительно, поэтому необходимо $w'(x) \equiv 0$, а тогда $w(x) \equiv \text{const}$, и условия (6) дают $w(x) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Решение краевой задачи, определяемой уравнением (3) и краевыми условиями (4), можно построить с помощью так называемой *функции Грина* данной задачи. К построению этой функции мы и переходим.

Построим интегралы $u_1(x)$ и $u_2(x)$ однородного уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие условиям:

$$u_1(a) = 0, \quad u_1'(a) \neq 0; \quad u_2(b) = 0, \quad u_2'(b) \neq 0. \quad (8)$$

Покажем, что $u_1(x)$ и $u_2(x)$ между собой линейно независимы. Предположим противное, и пусть $u_2(x) = cu_1(x)$, $c = \text{const}$. Тогда $u_2(a) = cu_1(a) = 0$, и функция $u_2(x)$ удовлетворяет уравнению (5) и краевым условиям (6); в силу только что доказанной единственности решения краевой задачи, $u_2(x) \equiv 0$, что противоречит условию $u_2'(b) \neq 0$.

Функция Грина определяется формулой

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{u_1(x) u_2(s)}{C}, & x \leq s, \\ \frac{u_1(s) u_2(x)}{C}, & x \geq s, \end{cases} \quad (9)$$

где C — постоянная, значение которой будет указано ниже.

Отметим некоторые свойства функции Грина.

1. $G(x, s)$ непрерывна при $a \leq x, s \leq b$.

2. При $x \neq s$ $LG = 0$; действительно, если $x < s$, то $LG = \frac{u_2(s)}{C} Lu_1 = 0$; если же $x > s$, то

$$LG = \frac{u_1(s)}{C} Lu_2 = 0.$$

3. Функция Грина удовлетворяет краевым условиям (4)

$$G(a, s) = G(b, s) = 0.$$

Действительно, если $x = a$, то $x \leq s$ и в формуле (9) надо брать верхнюю строку; это дает нам

$$G(a, s) = \frac{u_1(a) u_2(s)}{C} = 0.$$

Если же $x = b$, то $x \geq s$, и нижняя строка формулы (9) дает

$$G(b, s) = \frac{u_1(s) u_2(b)}{C} = 0.$$

4. Функция Грина симметрична:

$$G(x, s) = G(s, x).$$

Пусть, например, $x < s$. Тогда

$$G(x, s) = \frac{u_1(x) u_2(s)}{C}.$$

Для вычисления $G(s, x)$ заметим, что в данном случае $s > x$, т. е. первый аргумент больше второго, и надо воспользоваться нижней строкой формулы (9), поменяв в ней x и s местами. Это дает нам

$$G(s, x) = \frac{u_1(x) u_2(s)}{C} = G(x, s).$$

5. Постоянную C можно подобрать так, чтобы

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{s=x+0} - \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{s=x-0} = \frac{1}{p(x)}. \quad (10)$$

Для доказательства вычислим левую часть в (10)

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{s=x+0} - \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{s=x-0} = \frac{\Delta(x)}{C},$$

где $\Delta(x) = u_1'(x)u_2(x) - u_2'(x)u_1(x)$ есть определитель Вронского функций $u_2(x)$ и $u_1(x)$. Дифференцируя, находим

$$\Delta'(x) = u_1''(x)u_2(x) - u_2''(x)u_1(x).$$

Определив вторые производные из тождеств $Lu_k = 0$:

$$u_k'' = -\frac{p'}{p}u_k' + \frac{q}{p}u_k; \quad k = 1, 2$$

и подставив их в $\Delta'(x)$, найдем

$$\Delta'(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)}\Delta(x).$$

Отсюда $\Delta(x) = \frac{\Delta_0}{p(x)}$, где Δ_0 некоторая постоянная. Теперь достаточно положить $C = \Delta_0$, и формула (10) доказана.

Докажем теперь, что решение уравнения (3) при краевых условиях (4) дается формулой

$$u(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds. \quad (11)$$

Прежде всего, по свойству 3 функции Грина

$$u(a) = \int_a^b G(a, s) f(s) ds = 0$$

и

$$u(b) = \int_a^b G(b, s) f(s) ds = 0,$$

так что функция (11) удовлетворяет краевым условиям. Найдем далее первые две производные этой функции. Имеем

$$u(x) = \int_a^x G(x, s) f(s) ds + \int_x^b G(x, s) f(s) ds.$$

Приняв во внимание, что функция Грина непрерывна, а ее первая производная терпит при $s = x$ скачок, определяемый формулой (10), найдем

$$\begin{aligned} u'(x) &= \int_a^x \frac{\partial G}{\partial x} f(s) ds + \int_x^b \frac{\partial G}{\partial x} f(s) ds, \\ u''(x) &= \int_a^x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} f(s) ds + \int_x^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} f(s) ds + \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{s=x-0} - \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{s=x+0} \right\} f(x) = \\ &= \int_a^x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} f(s) ds + \int_x^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} f(s) ds - \frac{f(x)}{p(x)}. \end{aligned}$$

Умножим $u''(x)$ на $p(x)$, $u'(x)$ на $p'(x)$, $u(x)$ на $-q(x)$ и сложим. Учтя свойство 2 функции Грина, найдем

$$Lu = \int_a^x f(s) L\dot{G} ds + \int_x^b f(s) LG ds - f(x) = -f(x),$$

что и требовалось доказать.

В приложениях часто встречается случай, когда уравнение (3) решается при краевых условиях, отличных от условий (4). Мы рассмотрим еще краевые условия вида

$$u'(a) - \alpha u(a) = 0, \quad u'(b) + \beta u(b) = 0, \quad (12)$$

где α и β — неотрицательные постоянные. Отдельно рассмотрим два случая.

1. Одна из постоянных α, β отлична от нуля. Пусть $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. В этом случае предшествующие рассуждения в основном сохраняются, и мы отметим только необходимые изменения.

Во-первых в доказательстве единственности решения, при интегрировании по частям в формуле (7), внеинтегральный член не исчезает, а принимает вид

$$p(b)w'(b)\overline{w(b)} - p(a)w'(a)\overline{w(a)}.$$

Исключив производные с помощью соотношений

$$w'(a) - \alpha w(a) = 0, \quad w'(b) + \beta w(b) = 0,$$

которым удовлетворяет функция $w(x) = u(x) - v(x)$, так как каждое из решений $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяет условиям (12), мы приведем тождество (7) к виду

$$\int_a^b \{p(x)|w'(x)|^2 + q(x)|w(x)|^2\} dx + \alpha p(a)|w(a)|^2 + \\ + \beta p(b)|w(b)|^2 = 0. \quad (13)$$

Отсюда необходимо $w'(x) \equiv 0$ и $w(a) = 0$; как и выше, отсюда заключаем, что $w(x) \equiv 0$ и, следовательно, решение единственно.

Во-вторых при построении функции Грина следует условия (8) заменить такими:

$$u'_1(a) - \alpha u_1(a) = 0, \quad u_1(a) \neq 0; \quad u'_2(b) + \beta u_2(b) = 0, \quad u_2(b) \neq 0.$$

В-третьих, свойство 3 функции Грина на этот раз записывается так

$$\left. \frac{\partial G(x, s)}{\partial x} \right|_{x=a} - \alpha G(a, s) = 0; \quad \left. \frac{\partial G(x, s)}{\partial x} \right|_{x=b} + \beta G(b, s) = 0.$$

II. $\alpha = \beta = 0$, так что краевые условия имеют вид

$$u'(a) = u'(b) = 0. \quad (14)$$

В этом случае условия (2) необходимо усилить, заменив их такими:

$$p(x) \geq p_0 = \text{const} > 0, \quad q(x) \geq q_0 = \text{const} > 0. \quad (15)$$

Доказательство единственности решения в этом случае проводится так. Тождество (13) принимает вид

$$\int_a^b \{p(x)|w'(x)|^2 + q(x)|w(x)|^2\} dx = 0.$$

Отсюда

$$\int_a^b q(x) |w(x)|^2 dx = 0$$

и, так как $q(x)$ строго положительно, то необходимо $w(x) \equiv 0$. Остальное протекает, как в только что разобранном случае I.

§ 39. Собственные числа и собственные функции обыкновенного дифференциального оператора

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu + \lambda r(x)u = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u + \lambda r(x)u = 0 \quad (1)$$

при краевых условиях

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (2)$$

Функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ будем считать непрерывными на сегменте $[a, b]$. Далее, будем предполагать, что $p(x) \geq p_0 = \text{const} > 0$, $q(x) \geq 0$, $r(x) \geq r_0 = \text{const} > 0$. (3)

При любом значении λ существует, очевидно, тривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2).

Поставим задачу: найти такие значения λ , при которых уравнение (1) имеет *нетривиальные* решения, удовлетворяющие краевым условиям (2).

Эти значения λ называются *собственными числами*, а соответствующие решения — *собственными функциями* уравнения (1), или дифференциального оператора L , при краевых условиях (2).

Поясним происхождение нашей задачи. Рассмотрим неоднородную струну, которая в состоянии равновесия занимает отрезок $[a, b]$ оси x . Допустим, что струна подвержена действию натяжения и восстанавливающей силы, которые постоянны во времени, но меняются вдоль струны. Пусть в точке x линейная плотность струны равна $r(x)$, а действующее на струну натяжение равно $p(x)$. Из физических соображений очевидно, что $p(x) \geq 0$, $r(x) \geq 0$. Принятое нами условие $r(x) \geq r_0 > 0$ соответствует допущению, что

ни одно из поперечных сечений струны не вырождается в точку. Другое условие, $p(x) \geq p_0 > 0$, означает, что натяжение струны нигде не обращается в нуль; это условие выполняется во многих случаях. Наконец, обозначим через $q(x)$ восстанавливающую силу в точке x : это значит, что если в точке x струна отклонилась от положения равновесия на величину U , то к участку струны $(x, x + dx)$ приложена сила, численно равная $q(x)U dx$ и направленная противоположно смещению U . Очевидно, следует считать $q(x) \geq 0$.

Обычным способом (например, из принципа Гамильтона или путем подсчета сил, приложенных к участку $(x, x + dx)$ и последующего применения второго закона Ньютона) трудно вывести дифференциальное уравнение колебаний нашей струны; оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right] - q(x) U = r(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где $U(x, t)$ — смещение точки струны с абсциссой x в момент времени t .

Пусть в начальный момент $t = 0$ нам известны смещения и скорости точек струны

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad (5)$$

и пусть концы струны неподвижно закреплены:

$$U|_{x=a} = U|_{x=b} = 0. \quad (6)$$

Поставим задачу об интегрировании уравнения (4) при начальных и краевых условиях (5) и (6). Будем решать эту задачу по методу Фурье: будем искать отличные от тождественного нуля решения уравнения (4), которые имеют вид $U(x, t) = u(x)T(t)$ и которые удовлетворяют краевым условиям (6). Разделяя переменные, легко убедимся, что функция $u(x)$ должна удовлетворять уравнению (1) и краевым условиям (2) и быть отличной от тождественного нуля, т. е. что $u(x)$ должна быть решением поставленной в начале параграфа задачи о собственных числах и собственных функциях уравнения (1) при краевых условиях (2).

К той же задаче сводится, в числе многих других, задача об охлаждении неоднородного стержня, отдающего тепло в окружающую среду как через поверхности оснований, так

и через боковую поверхность. Не останавливаясь на выводе, укажем, что в этом случае температура $U(x, t)$ стержня в точке с абсциссой x в момент времени t удовлетворяет дифференциальному уравнению параболического типа

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right) - q(x) U = r(x) \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (7)$$

где коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ удовлетворяют упомянутым выше требованиям. Если на концах стержня поддерживается постоянная, равная нулю температура, то $U(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (6). Будем считать данной температуру $\varphi(x)$ в начальный момент, тогда должно быть удовлетворено еще и начальное условие

$$U|_{t=0} = \varphi(x). \quad (8)$$

Отыскивая по методу Фурье частные решения вида

$$U(x, t) = u(x) T(t),$$

найдем, что функция $u(x)$ должна быть, как и в случае задачи о струне, решением задачи о собственных числах и собственных функциях уравнения (1) при краевых условиях (2).

Для доказательства существования собственных чисел и собственных функций нашей задачи сведем эту последнюю к решению некоторого интегрального уравнения. С этой целью перепишем уравнение (1) в виде

$$Lu = -\lambda r(x) u(x),$$

что совпадает по форме с уравнением (3) § 38 при

$$f(x) = -\lambda r(x) u(x);$$

оба уравнения решаются при одних и тех же краевых условиях. Применяя в нашем случае формулу (11) § 38, получаем

$$u(x) = \lambda \int_a^b r(s) G(x, s) u(s) ds. \quad (9)$$

Мы получили однородное интегральное уравнение, которое равносильно совокупности дифференциального уравне-

ния (1) и краевых условий (2); в этом уравнении $u(x)$ — неизвестная функция, λ — параметр. В силу симметрии функции Грина, ядро уравнения (9), равное $r(s)G(x, s)$, симметрично, если $r(x) \equiv \text{const}$, и несимметрично в противном случае. Однако, всегда можно преобразовать уравнение (9) в уравнение с симметричным ядром. Для этого обе части уравнения (9) умножим на $\sqrt{r(x)}$ и введем новую неизвестную функцию

$$\varphi(x) = \sqrt{r(x)} u(x). \quad (10)$$

Положив еще

$$\sqrt{r(x)r(s)} G(x, s) = K(x, s), \quad (11)$$

мы приходим к уравнению

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = 0 \quad (12)$$

с симметричным ядром (11). Ниже будет показано, что это ядро имеет счетное множество характеристических чисел, которые, в силу теоремы 1 Фредгольма, стремятся к бесконечности при бесконечном увеличении номера. Заметим, что ядро (11) ограничено и, тем более, удовлетворяет условию (A).

Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ — характеристические числа уравнения (7) и $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ — соответствующие собственные функции, то, очевидно, что $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ суть собственные числа уравнения (1) при краевых условиях (2), а соответствующие собственные функции определяются соотношением

$$u_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{r(x)}}. \quad (13)$$

Нетрудно доказать, что собственные функции $u_n(x)$ ортогональны и нормированы с весом $r(x)$. Действительно, собственные функции интегрального уравнения (9) ортогональны:

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ 1 & \text{при } j = k, \end{cases}$$

Подставив вместо $\varphi_n(x)$ их значения (13), получаем

$$\int_a^b r(x) u_j(x) u_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ 1 & \text{при } j = k, \end{cases} \quad (14)$$

что и требовалось доказать.

Теорема разложения. Пусть $w(x)$ — функция, непрерывная вместе со своей первой и второй производной на сегменте $[a, b]$ и пусть на концах сегмента $w(a) = w(b) = 0$. Тогда эта функция разлагается в регулярно сходящийся ряд по собственным функциям обыкновенного дифференциального уравнения (1) при краевых условиях (2).

Функция

$$f(x) = -Lw = -\frac{d}{dx}(pw') + qw$$

непрерывна на сегменте $[a, b]$, и по условию теоремы $w(a) = w(b) = 0$. В таком случае $w(x)$ можно рассматривать как решение уравнения

$$Lw = -f(x)$$

при краевых условиях (2). Но тогда $w(x)$ можно представить по формуле (11) § 38

$$w(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds.$$

Умножим обе части этого равенства на $\sqrt{r(x)}$; в силу определения ядра $K(x, s)$ имеем

$$\sqrt{r(x)} w(x) = \int_a^b K(x, s) \frac{f(s)}{\sqrt{r(s)}} ds. \quad (15)$$

Отношение $\frac{f(s)}{\sqrt{r(s)}}$ — непрерывная и, тем более, квадратично суммируемая функция. В таком случае равенство (15) означает, что функция $\sqrt{r(x)} w(x)$ представима через ядро $K(x, s)$, а тогда по теореме 2 § 27 эта функция разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям ядра $K(x, s)$

$$\sqrt{r(x)} w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Отсюда

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{r(x)}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x). \quad (16)$$

Функция $r(x)$ строго положительна: $r(x) \geq r_0 > 0$, поэтому функция $\frac{1}{\sqrt{r(x)}}$ ограничена. Умножение на такую функцию не нарушает регулярной сходимости ряда, и ряд (16) также сходится регулярно.

Коэффициенты c_n вычисляются по формуле

$$c_n = (\sqrt{r} w, \varphi_n) = \int_a^b \sqrt{r(x)} w(x) \overline{\varphi_n(x)} dx$$

или, так как функции $\varphi_n(x)$ вещественны и

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sqrt{r(x)} u_n(x), \\ c_n &= \int_a^b r(x) w(x) u_n(x) dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Следствие. Множество ортонормированных собственных функций задачи (1) — (2) счетное.

Допустим противное: пусть существует только конечное число m этих функций. Если $w(x)$ — любая функция, удовлетворяющая условиям теоремы разложения, то, по формуле (16),

$$w(x) = \sum_{n=1}^m c_n u_n(x).$$

Но это равенство означает, что среди функций, удовлетворяющих условиям теоремы разложения, имеется только m линейно независимых. Это, однако, неверно: функции

$$\sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}; \quad n = 1, 2, \dots$$

удовлетворяют всем названным условиям: они непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными и обращаются в нуль на концах сегмента $[a, b]$; в то же время эти функции, взятые в любом конечном числе, линейно независимы.

Из общей теории интегральных уравнений с симметричным ядром следует, что собственные числа λ_n уравнения (1) при краевых условиях (2) вещественны. Докажем, что эти числа положительны. Тождество

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du_n}{dx} \right) - q(x) u_n(x) + \lambda_n r(x) u_n(x) = 0$$

умножим на $u_n(x)$ и проинтегрируем в пределах от a до b . Взяв первый интеграл по частям и принимая во внимание, что $u_n(a) = u_n(b) = 0$, получим

$$-\int_a^b \{p(x) u_n'^2(x) + q(x) u_n^2(x)\} dx + \lambda_n \int_a^b r(x) u_n^2(x) dx = 0.$$

Отсюда по формуле (14)

$$\lambda_n = \frac{\int_a^b \{p(x) u_n'^2(x) + q(x) u_n^2(x)\} dx}{\int_a^b r(x) u_n^2(x) dx} \geq 0.$$

Если бы оказалось, что $\lambda_n = 0$, то необходимо было бы

$$\int_a^b \{p(x) u_n'^2(x) + q(x) u_n^2(x)\} dx = 0.$$

Повторяя рассуждения, которые мы проводили при доказательстве единственности решения краевой задачи § 38, найдем, что $u_n(x) \equiv 0$. Это невозможно, так как собственная функция $u_n(x)$ отлична от тождественного нуля.

Интересно отметить случай, когда одно из условий (3) нарушается, а именно, когда $q(x)$, оставаясь непрерывной, может принимать отрицательные значения. Будучи непрерывной, эта функция ограничена снизу

$$q(x) \geq -M, \quad M = \text{const} > 0.$$

Положим

$$\gamma = \frac{M}{r_0}, \quad \lambda = \mu - \gamma, \quad \tilde{q}(x) = q(x) + \gamma r(x).$$

Очевидно, $\tilde{q}(x) \geq 0$. Уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) - \tilde{q}(x) u(x) + \mu r(x) u(x) = 0. \quad (18)$$

По доказанному; уравнение (18) при краевых условиях (2) имеет счетное множество положительных собственных чисел μ_n , $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, и отвечающих им ортонормированных с весом $r(x)$ собственных функций $u_n(x)$. Но тогда при тех же краевых условиях (2) уравнение (1) имеет счетное множество собственных чисел

$$\lambda_n = \mu_n - \gamma,$$

среди которых может оказаться *только конечное число отрицательных*; собственным числам λ_n отвечают только что упомянутые собственные функции $u_n(x)$.

Все сказанное в настоящем параграфе распространяется на тот случай, когда краевые условия (2) заменены условиями

$$u'(a) - \alpha u(a) = 0, \quad u'(b) + \beta u(b) = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0. \quad (19)$$

Если функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ непрерывны и $p(x) \geq p_0 > 0$, $r(x) \geq r_0 > 0$, то при краевых условиях (19) уравнение (1) имеет счетное множество стремящихся к бесконечности собственных чисел λ_n , среди которых может быть только конечное число отрицательных; этим собственным числам отвечают ортонормированные с весом $r(x)$ собственные функции $u_n(x)$. Для любой функции, непрерывной вместе с двумя первыми производными и удовлетворяющей условиям (19), имеет место теорема разложения по функциям $u_n(x)$. Если хотя бы одна из постоянных α или β отлична от нуля и $q(x) \geq 0$, то все собственные числа положительны. Если же $\alpha = \beta = 0$, но выполнено дополнительное условие $q(x) \geq q_0 = \text{const} > 0$, то по-прежнему $\lambda_n > 0$.

В заключение докажем, что собственные функции каждой из рассмотренных нами краевых задач образуют полную систему. Для этого заметим, что если функция $f(x)$ не обязательно непрерывна, а только квадратично суммируема в промежутке (a, b) , то формула (11) § 38 дает функцию, которая на сегменте $[a, b]$ абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной, удовлетворяет краевым условиям задачи и имеет почти всюду вторую производную, которая квадратично суммируема в (a, b) ; эта функция почти всюду в промежутке (a, b) удовлетворяет уравнению $Lu = -f(x)$.

Допустим теперь, что квадратично суммируемая в промежутке (a, b) функция $\omega(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям ядра (11). Функция

$$v(x) = \int_a^b G(x, s) \sqrt{r(s)} \omega(s) ds$$

удовлетворяет почти всюду уравнению $Lv = -\sqrt{r(x)} \omega(x)$. По теореме Гильберта — Шмидта

$$\sqrt{r(x)} v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\omega, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x) = 0.$$

Отсюда $v(x) = 0$ и $\omega(x) = -\frac{L(v)}{r(x)} = 0$, что и требовалось доказать.

§ 40. Обоснование метода Фурье

В § 39 были сформулированы две задачи математической физики, решение которых по методу Фурье приводит к задаче о собственных числах и собственных функциях для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Опираясь на полученные в § 39 результаты, можно показать, что при некоторых дополнительных условиях относительно начальных данных метод Фурье действительно дает решение соответствующей задачи математической физики.

Мы ограничимся здесь более простой задачей теплопроводности. Для функции $T(t)$ в результате разделения переменных получается дифференциальное уравнение $T' + \lambda_n T = 0$, откуда $T = A_n e^{-\lambda_n t}$; решение уравнения теплопроводности мы ищем в виде

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n t} u_n(x); \quad (1)$$

λ_n и $u_n(x)$ — собственные числа и собственные функции задачи, исследованной в § 39. Если ряд (1) сходится равномерно в полуполосе $a \leq x \leq b$, $t \geq 0$, то его сумма удовлетворяет краевым условиям

$$U(a, t) = U(b, t) = 0;$$

если, сверх того, ряд (1) допускает двукратное почленное дифференцирование по x и однократное — по t , то его сумма удовлетворяет уравнению теплопроводности. Допуская опять, что ряд (1) сходится равномерно в полуполосе $a \leq x \leq b$, $t \geq 0$, положим в этом ряде $t=0$; учтя начальное условие (8) § 39, получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x). \quad (2)$$

Отсюда видно, что коэффициенты A_n суть коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по отношению к системе функций $\{u_n(x)\}$, ортонормированных с весом $r(x)$:

$$A_n = \int_a^b r(x) \varphi(x) u_n(x) dx. \quad (3)$$

Чтобы обосновать метод Фурье для уравнения теплопроводности, нам остается указать условия, при которых ряд (1), в котором коэффициенты определяются формулой (3), равномерно сходится в упомянутой выше полуполосе и допускает, при $t > 0$, двукратное почленное дифференцирование по x и однократное — по t .

Теорема. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна в сегменте $[a, b]$ вместе со своими двумя первыми производными, и пусть $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Тогда ряд (1) регулярно сходится в полуполосе $a \leq x \leq b$, $t \geq 0$. При $a \leq x \leq b$, $t > 0$ ряд (1) можно дифференцировать почленно сколько угодно раз по t и два раза — по x .

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы разложения § 39, поэтому при $a \leq x \leq b$ ряд (2) сходится регулярно. Собственные числа $\lambda_n > 0$, поэтому $e^{-\lambda_n t} \leq 1$ при $t \geq 0$, и ряд (1) сходится, также регулярно, в упомянутой в теореме полуполосе.

Доказательство почленной дифференцируемости ряда (1) мы проведем, используя сравнительно грубые, но зато просто получаемые оценки абсолютных величин собственных функций $u_n(x)$ и их производных.

Напишем интегральное уравнение, которому удовлетворяет функция $u_n(x)$:

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \lambda_n \int_a^b G(x, s) r(s) u_n(s) ds = \\ &= \lambda_n \int_a^b G(x, s) \sqrt{r(s)} \cdot \sqrt{r(s)} u_n(s) ds. \end{aligned} \quad (4)$$

По неравенству Буняковского

$$|u_n(x)| \leq \lambda_n \left\{ \int_a^b G^2(x, s) r(s) ds \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b r(s) u_n^2(s) ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Второй интеграл равен единице [функции $u_n(s)$ нормированы с весом $r(s)$], а первый ограничен, потому что ограничены функции $G(x, s)$ и $r(s)$. Отсюда вытекает оценка абсолютной величины для функций u_n :

$$|u_n(x)| \leq C \lambda_n; \quad C = \text{const.} \quad (5)$$

Теперь легко доказать почленную дифференцируемость ряда (1) по t . Формально продифференцировав этот ряд k раз по t , получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda_n^k A_n e^{-\lambda_n t} u_n(x). \quad (6)$$

Из неравенства Бесселя следует, что $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Отсюда вытекает, в частности, что коэффициенты A_n ограничены; пусть $|A_n| \leq M$. Ряд (6) будем рассматривать в полуполосе $a \leq x \leq b$, $t \geq \delta$, где δ — любое положительное число. В этой полуполосе ряд (6) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} C M \lambda_n^{k+1} e^{-\lambda_n \delta}$$

и потому сходится равномерно, но тогда k -кратное почленное дифференцирование по t ряда (1) законно. Так как δ — произвольное положительное число, то почленное дифференцирование по t допустимо при любом $t > 0$.

Продифференцируем равенство (4) по x :

$$u'_n(x) = \lambda_n \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x} r(s) u_n(s) ds.$$

Производная $\frac{\partial G}{\partial x}$ ограничена; применяя опять неравенство Буняковского, получаем оценку первой производной собственной функции:

$$|u'_n(x)| \leq C_1 \lambda_n; \quad C_1 = \text{const.} \quad (7)$$

Вторую производную оценим, используя дифференциальное уравнение собственных функций

$$\frac{d}{dx} [p(x) u'_n(x)] - [q(x) - \lambda_n r(x)] u_n(x) = 0.$$

Отсюда

$$u''_n(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)} u'_n(x) + \left[\frac{q(x)}{p(x)} - \lambda_n \frac{r(x)}{p(x)} \right] u_n(x).$$

Отношения в правой части ограничены; из оценок (5) и (7) следует теперь, что

$$|u''_n(x)| \leq C_2 \lambda_n^2; \quad C_2 = \text{const.} \quad (8)$$

Продифференцировав ряд (1) по x формально один или два раза, получим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n t} u'_n(x); \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n t} u''_n(x),$$

которые в полуполосе $a \leq x \leq b$, $t \geq \delta$ мажорируются сходящимися числовыми рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_1 M \lambda_n e^{-\lambda_n \delta}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_2 M \lambda_n^2 e^{-\lambda_n \delta}.$$

Отсюда и вытекает законность одно- или двукратного дифференцирования ряда (1) по x .

§ 41. Функция Грина для оператора Лапласа

Пусть D — конечная область плоскости (x, y) , ограниченная контуром L ; $P(x, y)$ и $Q(\xi, \eta)$ — произвольные точки этой области. Функцией Грина области D для оператора Лапласа называется функция $G(P, Q)$, обладающая следующими свойствами.

$$1. G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - g(P, Q),$$

где r — расстояние между точками P и Q , а $g(P, Q)$ — гармоническая в D функция как координат x, y , так и координат ξ, η .

$$2. \text{Если } P \in L, \text{ то } G(P, Q) = 0.$$

Ограничимся случаем, когда область G — односвязная. В этом случае функция Грина области D строится просто. Положим $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, и пусть функция $t = \omega(z)$ конформно отображает область D на круг $|t| < 1$ плоскости комплексной переменной t . Тогда

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - \omega(z) \overline{\omega(\zeta)}}{\omega(z) - \omega(\zeta)} \right|. \quad (1)$$

Из формулы (1) видно, что функция Грина симметрична ¹⁾:

$$G(P, Q) = G(Q, P).$$

Докажем, что функция (1) действительно обладает свойствами 1 и 2 функции Грина. Формулу (1) преобразуем так:

$$\begin{aligned} G(P, Q) &= -\frac{1}{2\pi} \ln |z - \zeta| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{(z - \zeta)(1 - \omega(z) \overline{\omega(\zeta)})}{\omega(z) - \omega(\zeta)} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\omega(z) - \omega(\zeta)}{(z - \zeta)(1 - \omega(z) \overline{\omega(\zeta)})} \right|. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим функцию под знаком модуля во втором слагаемом. Если $P \in D$, $Q \in D \neq L$, то $|\omega(z)| < 1$, $|\omega(\zeta)| \leq 1$. Отсюда следует, что при $z \neq \zeta$ рассматриваемая функция

¹⁾ Из формулы (1) вытекает симметричность функции Грина только в случае односвязной области; в курсах математической физики доказывается, что симметричность функции Грина имеет место независимо от связности области.

регулярна в D . В точке $z = \zeta$ наша функция имеет устранимую особенность, так как существует предел

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\omega(z) - \omega(\zeta)}{(z - \zeta)(1 - \overline{\omega(z)\omega(\zeta)})} = \frac{\omega'(\zeta)}{1 - |\omega(\zeta)|^2}; \quad (3)$$

этот предел конечен и отличен от нуля, потому что теперь $|\omega(\zeta)| < 1$ и, в силу конформности преобразования, $\omega'(\zeta) \neq 0$. Положив рассматриваемую функцию равной величине (3) при $z = \zeta$, мы сделаем эту функцию регулярной в области D ; кроме того, она отлична от нуля, так как $\omega(z) \neq \omega(\zeta)$ при $z \neq \zeta$, а тогда функция

$$g(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\omega(z) - \omega(\zeta)}{(z - \zeta)(1 - \overline{\omega(z)\omega(\zeta)})} \right|$$

гармонична как функция от x и y при фиксированных ξ и η . Будучи симметричной относительно P и Q , функция $g(P, Q)$ гармонична также относительно ξ и η при фиксированных x и y . Этим доказано свойство 1.

Просто доказывается свойство 2. Если $P \in L$, то $|\omega(z)| = 1$ и, следовательно, $\frac{1}{\overline{\omega(z)}} = \overline{\omega(z)}$. Но тогда

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\overline{\omega(z)} - \overline{\omega(\zeta)}}{\omega(z) - \omega(\zeta)} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln |\omega(z)| = 0.$$

Заметим, что в силу симметрии функции Грина $G(P, Q) = 0$, если $Q \in L$ и $P \in D$.

Теорема 1. Если h — диаметр области D , то справедливо неравенство

$$0 \leq G(P, Q) \leq \ln \frac{h}{r}. \quad (4)$$

Функцию Грина представим в виде

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{h}{r} - g_1(P, Q); \quad g_1(P, Q) = g(P, Q) + \frac{1}{2\pi} \ln h.$$

Зафиксируем точку P внутри области. Тогда $g_1(P, Q)$ есть гармоническая функция точки Q и потому достигает минимума на контуре L . Но если $Q \in L$, то $G(P, Q) = 0$ и

$$g_1(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{h}{r} \geq 0.$$

Отсюда следует, что функция $g_1(P, Q)$ неотрицательна. Теперь

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{h}{r} - g_1(P, Q) \leq \frac{1}{2\pi} \ln \frac{h}{r}.$$

Фиксируя по-прежнему точку P внутри области, вырежем ее кружком достаточно малого радиуса ϵ с центром в P (черт. 8). В оставшейся двусвязной области D_ϵ функция $G(P, Q)$ гармонична по отношению к точке Q и потому достигает минимума на контуре области D_ϵ . Но $G(P, Q) = 0$ на L и $G(P, Q)$ имеет сколько угодно большие положительные значения на окружности $r = \epsilon$, если величина ϵ достаточно мала. Отсюда следует, что $G(P, Q) \geq 0$. Сопоставляя полученные неравенства, придем к неравенству (4).

Пусть теперь область D такова, что производная отображающей функции, $\omega'(z)$, непрерывна в замкнутой области $D + L$ и нигде на контуре L не обращается в нуль. Тогда из формулы (1) вытекает следующее: если точка P (или Q) фиксирована внутри области D , то функция Грина имеет первые производные по ξ и η (или по x и y), непрерывные в замкнутой области $D + L$ за исключением точки $Q = P$. Поведение первых производных функции Грина в точках, близких к точке P , дается следующей теоремой.

Теорема 2. Если область D такова, что $\omega'(z)$ непрерывна в замкнутой области и нигде на контуре не обращается в нуль, то существует такая постоянная c , что

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \leq \frac{c}{r}, \quad \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| \leq \frac{c}{r}, \quad \left| \frac{\partial G}{\partial \xi} \right| \leq \frac{c}{r}, \quad \left| \frac{\partial G}{\partial \eta} \right| \leq \frac{c}{r}. \quad (5)$$

Имеем

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \ln \left| \frac{1 - \omega(z) \overline{\omega(\zeta)}}{\omega(z) - \omega(\zeta)} \right| = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{1 - \omega(z) \overline{\omega(\zeta)}}{\omega(z) - \omega(\zeta)}.$$

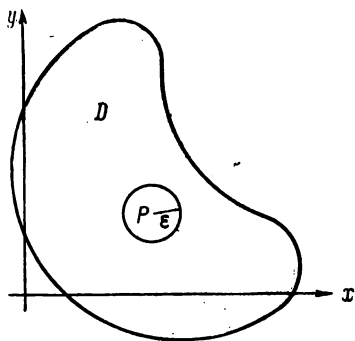


Рис. 8.

Положим $\omega(z) = t$, $\omega(\zeta) = \tau$.

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{1 - \omega(z) \overline{\omega(\zeta)}}{\omega(z) - \omega(\zeta)} = \omega'(z) \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1 - t\bar{\tau}}{t - \tau}.$$

Производная $\omega'(z)$ непрерывна в замкнутой области и не обращается нигде в нуль, поэтому существуют две положительные постоянные a и b , такие, что $a \leq |\omega'(z)| \leq b$. Теперь

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \omega'(z) \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1 - t\bar{\tau}}{t - \tau} \right| \leq \frac{b'}{2\pi} \frac{1 - |\tau|^2}{|t - \tau| \cdot |1 - t\bar{\tau}|}.$$

Далее, $|1 - t\bar{\tau}| \geq 1 - |t| \cdot |\tau| \geq 1 - |\tau|$, так как $|t| \leq 1$. Отсюда

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \leq \frac{b(1 + |\tau|)}{2\pi |t - \tau|} \leq \frac{b}{\pi |t - \tau|}.$$

Пусть $z = \psi(t)$ — функция, обратная функции $t = \omega(z)$. Тогда $\psi'(t) = \frac{1}{\omega'(z)}$ и, следовательно, $|\psi'(t)| \leq \frac{1}{a}$. Теперь

$$r = |z - \zeta| = \left| \int_{\tau}^t \psi'(\alpha) d\alpha \right| \leq \frac{|t - \tau|}{a}.$$

Отсюда

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \leq \frac{c}{r}; \quad c = \frac{b}{\pi a}.$$

Аналогично доказываются и остальные неравенства (5).

При тех же предположениях относительно отображающей функции $\omega(z)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $U(Q)$ — функция, непрерывная вместе со своими первыми производными в замкнутой области $D + L$ и имеющая непрерывные вторые производные в открытой области D , и пусть эта функция обращается в нуль на контуре L . Тогда справедлива формула

$$U(P) = - \int_D \int G(P, Q) \Delta U(Q) d\xi d\eta. \quad (6)$$

К функциям $U(Q)$, $G(P, Q)$ и к области D_ε (черт. 8) можно применить известную формулу Грина:

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} \int [U(Q) \Delta G(P, Q) - G(P, Q) \Delta U(Q)] d\xi d\eta = \\ = \int_L \left(U \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) dl + \int_{r=\varepsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) dl; \end{aligned}$$

здесь ν — нормаль к контуру, внешняя по отношению к области D_ε . В последнем равенстве исчезают интеграл по контуру L и первое слагаемое под знаком двойного интеграла. Отсюда

$$- \int_{D_\varepsilon} \int G(P, Q) \Delta U(Q) d\xi d\eta = \int_{r=\varepsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) dl. \quad (7)$$

Положим теперь $\varepsilon \rightarrow 0$. Предельный переход в (7) слева непосредственно приводит к интегралу

$$- \int_D \int G(P, Q) \Delta U(Q) d\xi d\eta;$$

правую часть формулы (7) рассмотрим подробнее. Заметим прежде всего, что функция U и ее первые производные, будучи непрерывными в замкнутой области, ограничены; существует, следовательно, такая постоянная M , что $|U| \leq M$, $\left| \frac{\partial U}{\partial \nu} \right| \leq M$. Введем полярные координаты r и φ с полюсом в P , тогда $dl|_{r=\varepsilon} = \varepsilon d\varphi$. Второй член в (7) справа оценивается так:

$$\left| \int_{r=\varepsilon} G \frac{\partial U}{\partial \nu} dl \right| \leq \varepsilon M \int_0^{2\pi} G(P, Q) d\varphi \leq M \varepsilon \ln \frac{h}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Чтобы выяснить предел первого члена справа в (7), заметим, что на окружности $r = \varepsilon$ внешняя нормаль направлена против радиуса, поэтому

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = - \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial r} \Big|_{r=\varepsilon}.$$

Внутри области D функция g гармонична, поэтому

$$\left| \frac{\partial g}{\partial r} \right|_{r=\varepsilon} \leq N,$$

где N — некоторая постоянная. Теперь

$$\int_{r=\varepsilon} U \frac{\partial G}{\partial \nu} dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(Q) d\varphi + \varepsilon \int_0^{2\pi} U(Q) \frac{\partial g}{\partial r} \bigg|_{r=\varepsilon} d\varphi.$$

Второй интеграл по модулю не превосходит величины $2\pi\varepsilon MN$ и потому стремится к нулю вместе с ε . Первый же интеграл равен

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x + \varepsilon \cos \varphi, y + \varepsilon \sin \varphi) d\varphi,$$

что стремится к $U(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Сопоставляя результаты предельных переходов справа и слева в формуле (7), приходим к соотношению (6).

При прежних предположениях относительно области D верна следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\rho(Q)$ непрерывная и непрерывно дифференцируемая в замкнутой области $D + L$ функция. Тогда функция

$$U(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_D \int G(P, Q) \rho(Q) d\xi d\eta \quad (8)$$

непрерывна вместе со своими первыми производными в замкнутой области $D + L$, обращается в нуль на контуре L , имеет внутри области D непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \rho(P). \quad (9)$$

Подынтегральная функция в (8) непрерывна, кроме точки $P=Q$, а интеграл (8) сходится равномерно в силу теоремы 1. Отсюда следует, что функция $U(P)$ непрерывна в $D + L$. Если $P \in L$, то $G(P, Q) = 0$ и $U(P) = 0$. Фор-

мальное дифференцирование интеграла (8) по x и y приводит к интегралам

$$-\frac{1}{2\pi} \int_D \int \frac{\partial G}{\partial x} \rho(Q) d\xi d\eta, \quad -\frac{1}{2\pi} \int_D \int \frac{\partial G}{\partial y} \rho(Q) d\xi d\eta, \quad (10)$$

которые сходятся равномерно в силу теоремы 2. В таком случае, как известно, формальное дифференцирование законно, и функция $U(P)$ имеет в замкнутой области непрерывные первые производные, выражаемые интегралами (10).

Перейдем к исследованию вторых производных. Имеем

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_D \int \rho(Q) \ln r d\xi d\eta + \\ + \int_D \int g(P, Q) \rho(Q) d\xi d\eta = U_1(P) + U_2(P).$$

Дифференцируя это, например, по x , найдем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_D \int \rho(Q) \frac{\partial \ln r}{\partial x} d\xi d\eta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_D \int \frac{\partial g}{\partial x} \rho(Q) d\xi d\eta. \quad (11)$$

Второе слагаемое справа в (11) имеет внутри области D производные всех порядков, так как функция $g(P, Q)$ гармонична. Исследуем первое слагаемое. Заметим, что $\frac{\partial \ln r}{\partial x} = -\frac{\partial \ln r}{\partial \xi}$; подставив это в D и интегрируя по частям, получим

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_D \int \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \ln r d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_L \rho(Q) \cos(\nu, x) \ln r dl. \quad (12)$$

Если $P \in D$, то в контурном интеграле подынтегральная функция имеет непрерывные производные всех порядков по x и y ; отсюда следует, что упомянутый интеграл также имеет в D непрерывные производные всех порядков. Что же касается двойного интеграла в (12), то его формальное дифференцирование по x или по y приводит к равномерно сходящемуся интегралу; отсюда следует, что двойной интеграл

в (12) имеет непрерывные в D (и даже в $D + L$) первые производные. Собирая результаты исследования, видим, что функция (8) имеет непрерывные в D вторые производные.

Остается доказать, что функция $U(P)$ удовлетворяет уравнению (9). Имеем

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \Delta U_1 + \int_D \int \rho(Q) \Delta_P g(P, Q) d\xi d\eta$$

и, так как функция $g(P, Q)$ гармонична, $\Delta U = \Delta U_1$.

Для вычисления ΔU_1 продифференцируем равенство (12) по x :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_D \int \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \ln r}{\partial x} d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_L \rho(Q) \cos(\nu, x) \frac{\partial \ln r}{\partial x} dl. \quad (13)$$

Двойной интеграл преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_D \int \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \ln r}{\partial x} d\xi d\eta &= - \int_D \int \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \ln r}{\partial \xi} d\xi d\eta = \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{D_\epsilon} \int \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \ln r}{\partial \xi} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

или, если последний интеграл взять по частям,

$$\begin{aligned} \int_D \int \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \ln r}{\partial x} d\xi d\eta &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{D_\epsilon} \int \rho(Q) \frac{\partial^2 \ln r}{\partial \xi^2} d\xi d\eta - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2\pi} \int_L \rho(Q) \frac{\partial \ln r}{\partial \xi} \cos(\nu, x) dl - \frac{1}{2\pi} \int_{r=\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial \ln r}{\partial \xi} \cos(\nu, x) dl \right\}. \end{aligned}$$

Подставив это в равенство (13) и замечая, что

$$\frac{\partial \ln r}{\partial x} = - \frac{\partial \ln r}{\partial \xi},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{D_\epsilon} \int \rho(Q) \frac{\partial^2 \ln r}{\partial \xi^2} d\xi d\eta - \\ &- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{r=\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial \ln r}{\partial \xi} \cos(\nu, x) dl. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{D_\varepsilon} \int \rho(Q) \frac{\partial^2 \ln r}{\partial \eta^2} d\xi d\eta - \\ - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{r=\varepsilon} \rho(Q) \frac{\partial \ln r}{\partial \eta} \cos(\nu, y) dl. \end{aligned}$$

Сложим последние равенства, приняв во внимание, что $\Delta \ln r = 0$:

$$\Delta U_1 = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} \rho(Q) \left[\cos(\nu, x) \frac{\partial \ln r}{\partial \xi} + \cos(\nu, y) \frac{\partial \ln r}{\partial \eta} \right] dl.$$

Имеем

$$\frac{\partial \ln r}{\partial \xi} = \frac{\xi - x}{r^2} = \frac{\cos(r, x)}{r}; \quad \frac{\partial \ln r}{\partial \eta} = \frac{\eta - y}{r^2} = \frac{\cos(r, \eta)}{r};$$

отсюда

$$\Delta U_1 = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} \rho(Q) \frac{\cos(\nu, r)}{r} dl.$$

Но на окружности $r = \varepsilon$ нормаль направлена против радиуса, а $dl = \varepsilon d\varphi$, где φ полярный угол, и мы получаем окончательно

$$\begin{aligned} \Delta U = \Delta U_1 = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \rho(x + \varepsilon \cos \varphi, y + \varepsilon \sin \varphi) d\varphi = \\ = \rho(x, y) = \rho(P). \end{aligned}$$

§ 42. Собственные функции задачи о колебании мембраны

Пусть мембрана в положении равновесия занимает конечную область D плоскости (x, y) . Контур области D обозначим через L . Допустим, что мембрана неподвижно закреплена по контуру. Задача о колебании такой мембраны сводится к интегрированию волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad (x, y) \in D, \quad t > 0 \quad (1)$$

при краевом условии

$$U|_L = 0 \quad (2)$$

и начальных условиях

$$U|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y). \quad (3)$$

По методу Фурье решение представляют в виде

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin a \sqrt{\lambda_n} t) \Phi_n(x, y), \quad (4)$$

где $\Phi_n(x, y)$ суть нетривиальные решения уравнения

$$\Delta \Phi_n + \lambda_n \Phi_n = \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} + \lambda_n \Phi_n = 0 \quad (5)$$

при краевом условии

$$\Phi_n|_L = 0; \quad (6)$$

числа λ_n должны быть подобраны так, чтобы такие нетривиальные решения существовали. Функции $\Phi_n(x, y)$ называются собственными функциями краевой задачи (5)–(6), а λ_n — соответствующими им собственными числами этой задачи. Легко доказывается, что собственные числа λ_n положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным числам, ортогональны. Действительно, умножим уравнение (5) скалярно на $\Phi_n(x, y)$, иначе говоря, умножим это уравнение на $\overline{\Phi_n(x, y)}$ и проинтегрируем по области D :

$$\int_D \int \overline{\Phi_n} \Delta \Phi_n dx dy + \lambda_n \int_D \int |\Phi_n|^2 dx dy = 0. \quad (7)$$

По известной формуле Грина

$$\begin{aligned} \int_D \int \overline{\Phi_n} \Delta \Phi_n dx dy &= \int_L \overline{\Phi_n} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \nu} ds - \\ &- \int_D \int \left(\frac{\partial \overline{\Phi_n}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\Phi_n}}{\partial y} \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} \right) dx dy; \end{aligned}$$

здесь ν — внешняя нормаль к L . Контурный интеграл исчезает в силу условия (6), поэтому

$$\int_D \int \overline{\Phi_n} \Delta \Phi_n dx dy = - \int_D \int \left(\left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy.$$

Теперь из уравнения (7) следует

$$\lambda_n = \frac{\int_D \int \left(\left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy}{\int_D \int |\Phi_n|^2 dx dy} \geq 0.$$

При этом, если $\lambda_n = 0$, то необходимо

$$\int_D \int \left(\left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy = 0,$$

откуда $\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} \equiv 0$, $\Phi_n \equiv \text{const.}$ Тогда из условия (6) следует $\Phi_n \equiv 0$, а это невозможно, так как по предположению Φ_n , как нетривиальное решение задачи, отлично от тождественного нуля. Окончательно, $\lambda_n > 0$. Заметим, что так как числа λ_n вещественны, то собственные функции Φ_n также можно считать вещественными.

Пусть теперь $\lambda_n \neq \lambda_m$ два собственные числа задачи (5)–(6), $\Phi_n(x, y)$ и $\Phi_m(x, y)$ — отвечающие им собственные функции. Воспользуемся еще одной формулой Грина

$$\int_D \int (v \Delta u - u \Delta v) dx dy = \int_L \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds.$$

Положим в этой формуле $u = \Phi_n(x, y)$, $v = \Phi_m(x, y)$. В силу условия (6) контурный интеграл исчезает. Далее, по уравнению (5)

$$\Phi_m \Delta \Phi_n - \Phi_n \Delta \Phi_m = (\lambda_n - \lambda_m) \Phi_n \Phi_m,$$

и формула Грина дает

$$(\lambda_n - \lambda_m) (\Phi_n, \Phi_m) = 0.$$

Но $\lambda_n \neq \lambda_m$, поэтому $(\Phi_n, \Phi_m) = 0$, что и требовалось доказать.

Если собственному числу λ_n соответствует несколько линейно независимых собственных функций, то их можно подвергнуть процессу ортогонализации (см. § 2), и мы вправе теперь считать, что функции $\Phi_n(x, y)$ образуют ортонормированную систему.

Допустим теперь, что ряд (4) можно почленно дифференцировать по t , так что

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} a \sqrt{\lambda_n} (-A_n \sin a \sqrt{\lambda_n} t + B_n \cos a \sqrt{\lambda_n} t) \Phi_n(x, y) \quad (8)$$

и что в рядах (4) и (8) можно почленно переходить к пределу при $t \rightarrow 0$. Выполнив этот переход и воспользовавшись начальными условиями (3), получим

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi_n(x, y); \quad \psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a \sqrt{\lambda_n} B_n \Phi_n(x, y), \quad (9)$$

отсюда легко находим искомые коэффициенты

$$A_n = (\varphi, \Phi_n), \quad B_n = \frac{1}{a \sqrt{\lambda_n}} (\psi, \Phi_n).$$

Остается выяснить условия, при которых ряды (9) сходятся и имеют суммы, соответственно равные $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$. Мы это сделаем, сведя задачу (5)—(6) к интегральному уравнению с симметричным ядром.

Задача состоит в отыскании значений λ , при которых уравнение $\Delta \Phi + \lambda \Phi = 0$ имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее краевому условию $\Phi|_L = 0$. По формуле (6) § 41

$$\Phi(P) = - \int_D \int G(P, Q) \Delta \Phi(Q) d\xi d\eta.$$

Но $\Delta \Phi = -\lambda \Phi$; подставив это в интеграл, получаем интегральное уравнение с симметричным ядром

$$\Phi(P) - \lambda \int_D \int G(P, Q) \Phi(Q) d\xi d\eta = 0. \quad (10)$$

Ядро $G(P, Q)$ уравнения (10) удовлетворяет условию (A). Действительно, по теореме 1 § 41,

$$\int_D \int G^2(P, Q) d\xi d\eta \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_D \int \ln^2 \frac{h}{r} d\xi d\eta.$$

Область D целиком лежит внутри круга радиуса h и с центром в любой точке области, поэтому

$$\begin{aligned} \int_D \int \ln^2 \frac{h}{r} d\xi d\eta &\leq \int_{r < h} \ln^2 \frac{h}{r} d\xi d\eta = 2\pi \int_0^h r \ln^2 \frac{h}{r} dr = \\ &= 2\pi h^2 \int_0^1 t \ln^2 t dt = \frac{\pi h^2}{2} \end{aligned}$$

и окончательно

$$\int_D \int G^2(P, Q) d\xi d\eta \leq \frac{h^2}{8\pi}.$$

Собственные числа и собственные функции задачи о колебании мембраны одновременно суть характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения (10). Докажем, что существует обратная зависимость: характеристические числа и собственные функции уравнения (10) суть также собственные числа и собственные функции задачи о колебании мембраны. Пусть λ и $\Phi(P)$ — характеристическое число и собственная функция уравнения (10). По следствию из теоремы 1 § 16, функция $\Phi(P)$ ограничена. В таком случае интеграл в (10) сходится равномерно в силу теоремы 1 § 41 и представляет собой функцию, непрерывную в $D+L$. Отсюда следует, что собственная функция $\Phi(P)$ непрерывна в $D+L$.

Формально дифференцируя интеграл, входящий в уравнение (10), по x или по y , получим интеграл, который, в силу теоремы 2 § 41, сходится равномерно. Отсюда следует, что $\Phi(P)$ имеет непрерывные в $D+L$ первые производные. Применяя теперь к упомянутому интегралу теорему 4 § 41, легко убедимся, что $\Phi|_L = 0$ и $\Delta\Phi = -\lambda\Phi$, т. е. что λ и $\Phi(P)$ суть собственное число и соответствующая ему собственная функция задачи о колебании мембраны.

К уравнению (10) применима развитая в предыдущей главе теория симметричных интегральных уравнений. Как и в § 39, из приводимой ниже теоремы разложения будет следовать, что ядро $G(P, Q)$ имеет счетное множество собственных функций $\Phi_n(P)$, отвечающих характеристическим числам $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Выше было доказано, что $\lambda_n > 0$.

Теорема разложения. Пусть функция $U(P)$ непрерывна со своими первыми производными в замкнутой области $D+L$, тогда как вторые производные этой функции непрерывны внутри области D и квадратично суммируемы в ней. Тогда $U(P)$ разлагается в регулярно сходящийся ряд по собственным функциям $\Phi_n(P)$.

Положим $h(P) = -\Delta U(P)$. По формуле (6) § 41,

$$U(P) = \int_D \int G(P, Q) h(Q) d\xi d\eta.$$

Имеем

$$|h(P)|^2 = \left| \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|^2 \leq 2 \left\{ \left| \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|^2 \right\}$$

и, так как по предположению правая часть этого неравенства суммируема в D , то функция $h(P)$ в D квадратично суммируема. Теперь, наша теорема оказывается непосредственным следствием теоремы 2 § 27.

Нетрудно указать теперь условия разложимости начальных функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в ряды (9): достаточно, чтобы эти функции были непрерывны вместе со своими первыми производными в $D+L$ и чтобы их вторые производные были непрерывны и квадратично суммируемы в D . При этих условиях ряды (9) сходятся в D регулярно.

УПРАЖНЕНИЯ¹⁾

1. Дано уравнение Вольтерра со слабой особенностью

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x \frac{A(x,s)}{(x-s)^\alpha} \varphi(s) ds = f(x),$$

$0 < \alpha < 1$, $|A(x, s)| \leq C$; функция $f(x)$ суммируема. Доказать сходимость последовательных приближений, существование и единственность суммируемого решения при любом значении λ .

2. Некоторая коническая поверхность, ось которой параллельна оси x_m , может без деформации перемещаться в m -мерном евклидовом пространстве координат x_1, x_2, \dots, x_m так, что направление оси конуса не меняется. Пусть P — произвольная точка верхнего полупространства $x_m > 0$ и D_P — область, ограниченная гиперплоскостью $x_m = 0$ и упомянутой конической поверхностью, вершина которой совмещена с точкой P . Доказать, что многомерное уравнение Вольтерра

$$\varphi(P) - \lambda \int_{D_P} K(P, Q) \varphi(Q) dV_Q = f(P),$$

у которого ядро $K(P, Q)$ и свободный член $f(P)$ ограничены, имеет при любом λ решение, ограниченное в любой фиксированной конечной области полупространства $x_m > 0$; это решение единственное и может быть получено по методу последовательных приближений.

3. Дифференцированием по x можно в известных условиях свести уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

к уравнению Вольтерра второго рода. Сформулировать и доказать достаточные условия существования решения уравнения Вольтерра первого рода.

¹⁾ Более трудные упражнения отмечены звездочкой.

4. Свести к уравнению Вольтерра второго рода уравнение

$$\int_a^x \frac{H(x, s)}{(x-s)^\alpha} \varphi(s) ds = f(x)$$

в предположениях, что $H(x, s)$ и $f(x)$ непрерывно дифференцируемы, $f(a) = 0$, $H(a, a) \neq 0$ и $0 < \alpha < 1$.

5. Пусть

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds = B^2, \quad \int_a^b \int_a^b |K_n(x, s)|^2 dx ds = B_n^2,$$

где $K_n(x, s)$ — n -ое итерированное ядро по отношению к ядру $K(x, s)$. Доказать, что если $B_2 = B^2$, то и при любом n будет $B_n = B^n$. Найти общий вид ядра, для которого справедливы эти равенства.

6. Доказать, что резольвента ядра $K(x, s)$ удовлетворяет каждому из интегральных уравнений

$$\Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(x, t) \Gamma(t, s; \lambda) dt,$$

$$\Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(t, s) \Gamma(x, t; \lambda) dt.$$

7. $\Gamma(x, s; \lambda)$ — резольвента некоторого ядра $K(x, s)$. Доказать, что резольвента уравнения

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \varphi(s) ds = f(x)$$

равна $\Gamma(x, s; \lambda + \mu)$.

8. Доказать, что резольвента удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Gamma(x, s; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda) \Gamma(t, s; \lambda) dt.$$

9. Пусть λ_1 и λ_2 — неравные между собой характеристические числа ядра $K(x, s)$. Доказать, что собственные функции уравнений

$$\varphi(x) - \lambda_1 \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = 0;$$

$$\psi(x) - \bar{\lambda}_2 \int_a^b K^*(x, s) \psi(s) ds = 0$$

ортогональны: $(\varphi, \psi) = 0$,

10. Доказать полную непрерывность интегрального оператора

$$T\varphi = \int_a^b \frac{A(x, s) \varphi(s) ds}{|x-s| |\ln|x-s||^{1+\alpha}},$$

в котором $|A(x, s)| \leq C = \text{const}$, $\alpha > 0$; $b - a < 1$.

11. $K(x, s)$ — вольтерровское ядро, удовлетворяющее единственному условию

$$\int_a^b \int_a^x |K(x, s)|^2 ds dx < \infty.$$

Доказать, что уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds = 0$$

имеет при любом λ только тривиальное квадратично суммируемое решение $\varphi(x) \equiv 0$.

(Указание: сперва рассмотреть значения x , близкие к a .)

12. Используя результаты предшествующей задачи и теорию Фредгольма, доказать, что ряд Неймана для уравнения Вольтерра

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

сходится (в среднем) при любом λ , если только ядро $K(x, s)$ и свободный член $f(x)$ квадратично суммируемы.

13. Множество M квадратично суммируемых функций называется *ограниченным*, если нормы этих функций огра-

ничены в совокупности: $\|\varphi\| \leq C$, если $\varphi(x) \in M$. Множество M квадратично суммируемых функций называется *компактным*, если из любой его бесконечной части можно выделить последовательность, сходящуюся в среднем. Доказать, что вырожденный оператор переводит всякое ограниченное множество в компактное.

14. Доказать, что вполне непрерывный оператор переводит всякое ограниченное множество в компактное.

(Указание: использовать диагональный процесс.)

15. A — произвольный ограниченный оператор. Доказать, что условие теоремы 4 Фредгольма необходимо для разрешимости уравнения $A\varphi = f(x)$.

16. A — ограниченный оператор; уравнение $A\varphi = f(x)$ разрешимо. Доказать, что уравнения $A\varphi = f$, $A^*A\varphi = A^*f$ эквивалентны.

17*. A — ограниченный оператор. Доказать, что радиус сходимости ряда Неймана для уравнения $\varphi - \lambda A\varphi = f(x)$, где $f(x)$ — произвольная квадратично суммируемая функция, равен

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \right\}^{-1}.$$

18*. Доказать, что ряд Неймана для уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

сходится в среднем в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{\Gamma}; \quad \Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \int_a^b |K_n(x, s)|^2 dx ds \right\}^{\frac{1}{2n}}.$$

19. n -ым следом ядра $K(x, s)$ называется интеграл

$$A_n = \int_a^b K(x, x) dx.$$

Доказать, что для симметричного ядра Фредгольма отношение $\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}}$ не убывает и ограничено.

(Указание: воспользоваться формулой для итерированных ядер и неравенством Буняковского.)

20*. Доказать, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n}}{A_{2n+2}},$$

существование которого вытекает из результата предшествующей задачи, если только ядро $K(x, s)$ симметрично, есть наименьшее характеристическое число второго итерированного ядра $K_2(x, s)$.

21. $K(x, s)$ — симметричное ядро. Доказать, что число n его характеристических чисел, которые удовлетворяют неравенству $|\lambda_k| < \Lambda$, не превосходит величины $B^2 \Lambda^2$.

22. λ_0 — характеристическое число симметричного ядра $K(x, s)$, а p — количество отвечающих этому числу линейно независимых собственных функций. Доказать, что $p < |\lambda_0|^2 B^2$.

23. Ядро со слабой особенностью

$$K(P, Q) = \frac{A(P, Q)}{r^\alpha},$$

симметрично; λ_n — его характеристические числа. Для каких показателей μ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2\mu}}?$$

24. Найти необходимые и достаточные условия, которые следует наложить на свободный член $f(x)$, чтобы симметричное уравнение первого рода

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

было разрешимо. Найти общее решение этого уравнения.

(Указание: воспользоваться теоремой Гильберта — Шмидта.)

25. Решить несимметричное уравнение первого рода

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x),$$

предполагая его разрешимым. (Указание: см. упражнение 16).

26. λ_n — характеристические числа симметричного ядра $K(x, s)$, A_m — его следы (см. упражнение 19). Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m} = A_m, \quad m \geq 2.$$

27. Из результата предшествующей задачи вывести формулы

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{A_{2m+2}}{A_{2m}}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[2m]{A_{2m}}.$$

28. Из точных формул упражнения 27 вытекают приближенные формулы

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}, \quad |\lambda_1| \approx \frac{1}{\sqrt[2m]{A_{2m}}},$$

для первого характеристического числа симметричного ядра. Доказать, что первая из этих формул дает приближенное значение $|\lambda_1|$ с избытком, вторая — с недостатком.

29. Найти билинейные ряды для симметричных ядер $x+s$ и $l(x-s)$. Пределы интегрирования $a=0$; $b=1$.

30. Ядро $K(x, s)$ называется кососимметричным, если

$$K(x, s) = -K^*(x, s).$$

Предполагая ядро кососимметричным, доказать, что: 1) его характеристические числа чисто мнимые; 2) если λ вещественно, то решение уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

удовлетворяет неравенству $\|\varphi\| \leq \|f\|$.

31. Доказать, что теоремы о вещественности характеристических чисел и об ортогональности собственных функций справедливы для любого симметричного оператора. Оператор A называется симметричным, если для любых функций из области его определения имеет место тождество $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$.

32. Доказательство существования характеристического числа, данное в § 25, распространить на симметричные вполне непрерывные операторы.

33. A — ограниченный симметричный оператор; функция $\varphi_0(x)$ реализует максимум отношения $\frac{|(A\varphi, \varphi)|}{\|\varphi\|^2}$. Доказать, что $\varphi_0(x)$ — собственная функция оператора A , соответствующая характеристическому числу $\frac{\|\varphi_0\|}{(A\varphi_0, \varphi_0)}$.

34*. Пусть T — вполне непрерывный симметричный оператор, и пусть

$$\mu = \sup \frac{|(T\varphi, \varphi)|}{\|\varphi\|^2}.$$

Пусть, далее, $\psi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ — последовательность нормированных функций, таких, что $\lim |(T\psi_n, \psi_n)| = \mu$. Доказать, что последовательность $\psi_n(x)$ компактна, и что предел любой ее сходящейся частичной последовательности есть собственная функция оператора T ; соответствующее характеристическое число равно либо μ , либо $-\mu$.

35. Для симметричного вполне непрерывного оператора T доказать теорему, аналогичную теореме Гильберта — Шмидта: если $\{\lambda_n\}$ и $\{\varphi_n(x)\}$ — система характеристических чисел и собственных функций оператора T и $h(x)$ — произвольная квадратично суммируемая функция, то справедливо разложение

$$Th = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x),$$

причем ряд сходится в среднем.

36. T — симметричный вполне непрерывный оператор, λ_n — его характеристические числа. Доказать теорему: для того, чтобы оператор T был оператором Фредгольма с квадратично суммируемым в основном квадрате ядром, необходимо и достаточно, чтобы сходиллся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}.$$

37. A — произвольный ограниченный оператор. Доказать, что операторы AA^* и A^*A симметричны.

38. T — вполне непрерывный оператор. Доказать, что уравнения $\varphi = \lambda T^* T \varphi$ и $\psi = \lambda T T^* \psi$ имеют одни и те же характеристические числа.

(Указание: рассмотреть систему уравнений

$$\varphi = \sqrt{\lambda} T^* \psi; \quad \psi = \sqrt{\lambda} T \varphi.)$$

39*. Доказать, что всякий оператор, вполне непрерывный в классе квадратично суммируемых функций, имеет вид

$$T\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_k)}{\lambda_k} \psi_k(x),$$

где $\{\varphi_k(x)\}$ и $\{\psi_k(x)\}$ — две произвольные ортонормированные последовательности, λ_k — последовательность чисел (их можно считать положительными), удовлетворяющих условию

$$\lambda_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty.$$

40. Исходя из результата предшествующей задачи, найти необходимые и достаточные условия, которые следует наложить на свободный член уравнения первого рода

$$T\varphi = f(x),$$

в котором оператор T вполне непрерывен, чтобы это уравнение было разрешимо. Найти общее решение этого уравнения.

41. Задачу Коши об интегрировании линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x)$$

при начальных условиях

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)}$$

свести к уравнению Вольтерра второго рода относительно неизвестной $y^{(n)}(x)$.

42. Решить обобщенное двумерное уравнение Абеля

$$\int_{\sigma_0} \int \frac{\varphi(x, y) dx dy}{[(x_0 - x) - (y_0 - y)]^\alpha [(x_0 - x) + (y_0 - y)]^\beta} = f(x, y).$$

Здесь $0 < \alpha < 1$; $0 < \beta < 1$. Символ σ_0 имеет то же значение, что и в § 6.

43. $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — периодические функции с периодом, равным единице, строго положительные и непрерывные, а $p(x)$ еще и непрерывно дифференцируемая, на сегменте $[0, 1]$. Доказать существование собственных чисел и собственных функций краевой задачи, определяемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u + \lambda r(x)u = 0$$

и краевыми условиями $u(0) = u(1)$, $u'(0) = u'(1)$, означающими периодичность решения. Сформулировать соответствующую теорему разложения.

44. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$ и удовлетворяет условиям: $\varphi(0) = 0$; $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$;

$$\int_0^1 \frac{dx}{\varphi(x)} < \infty.$$

Доказать, что функция Грина краевой задачи

$$\frac{d}{dx} \left(\varphi(x) \frac{du}{dx} \right) + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0$$

ограничена; установить существование бесконечного множества собственных чисел и собственных функций этой задачи и сформулировать теорему разложения.

45. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) > 0 \text{ при } x > 0,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\varphi(x)} = \infty, \quad \int_0^1 \frac{x dx}{\varphi(x)} < \infty.$$

Поставим краевую задачу: $\frac{d}{dx} \left(\varphi(x) \frac{du}{dx} \right) + \lambda u = 0$, $u(1) = 0$; граничное условие в точке $x = 0$ не ставится и заменяется требованием, чтобы искомая функция была квадратично суммируема в промежутке $(0, 1)$. Доказать, что функция Грина таким образом поставленной краевой задачи квадратично суммируема в квадрате $0 < x < 1$; $0 < s < 1$; сформули-

ровать и доказать вытекающие отсюда следствия о собственных числах и собственных функциях этой краевой задачи.

46. Найти собственные числа и собственные функции ядра

$$K(x, s) = \begin{cases} s; & 0 \leq s \leq x \leq 1, \\ x; & 0 \leq x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

(Указание: доказать, что собственные функции ядра $K(x, s)$ удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению второго порядка и некоторым краевым условиям.)

47. Найти билинейное разложение функции Грина следующей краевой задачи: $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = y(1) = 0$.

48. Найти билинейное разложение функции Грина для уравнения Лапласа в прямоугольнике; на границе прямоугольника функция обращается в нуль.

49. Найти билинейное разложение функции Грина для уравнения Лапласа в круге; на окружности круга функция обращается в нуль.

50. Найти билинейное разложение функции Грина для уравнения Лапласа в круге при условии, что на окружности круга нормальная производная функции Грина обращается в нуль.

(Указание к упражнениям 48—50: для нахождения собственных функций воспользоваться разделением переменных.)

4 p. 45 x